目　录

第一章　预备知识

§1　标　架

为了确定空间中点的位置，必须首先在空间中建立参考系．最简单的参考系就是空间直角坐标系，即笛卡儿坐标系．所谓三维欧氏空间 E^3 中的笛卡儿坐标系是指从一点 O 引出的三条彼此垂直的实数轴，这三条实数轴分别称为 X 轴、Y 轴和 Z 轴．我们通常还要求笛卡儿坐标系是右手系，即在右手的食指、中指分别指向 X 轴、Y 轴的正向时，大姆指恰好指向 Z 轴的正向．点 O 称为坐标原点．若 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是分别表示 X 轴、Y 轴、Z 轴正向的单位向量，则笛卡儿坐标系也可以用 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 来表示，后者称为 E^3 中的一个**右手单位正交标架**，简称为**正交标架**．

在空间 E^3 中固定一个正交标架 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 之后，每一点 $p\in E^3$ 可以等同于一个向量 $\overrightarrow{Op}$．我们称 $\overrightarrow{Op}$ 为点 p 关于坐标原点 O 的向径．向径 $\overrightarrow{Op}$ 可以唯一地表示成 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合：

$$\overrightarrow{Op}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

则 (x,y,z) 是向径 $\overrightarrow{Op}$ 的分量，也称为点 p 在笛卡儿坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下的坐标．因此，在取定直角坐标系之后，空间 E^3 中的点与三个有序的实数构成的组 (x,y,z) 是成一一对应的，即 E^3 中的点可以看作对应的三个有序的实数．

现在来考察 E^3 中正交标架的集合．若 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是另一个正交标架，它的位置可以如下确定：设

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{e}_1=a_{11}\boldsymbol{i}+a_{12}\boldsymbol{j}+a_{13}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{e}_2=a_{21}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{23}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{e}_3=a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k}.\end{cases} \tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{e}_i$ 是彼此正交的单位向量，所以

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\tag{3}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 成右手系，所以

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2,$$

因而

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=1.\tag{4}$$

命

$$a=(a_1,a_2,a_3),$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\tag{5}$$

则A是其行列式为 1 的正交矩阵，即$A\in SO(3)$. 在取定的坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下，$E^3$ 中的正交标架与矩阵对（a,A）是一一对应的，因此 E^3 中的全体正交标架的集合可以与 $E^3\times SO(3)$ 等同起来，这是一个 6 维的空间.

E^3 中不同的正交标架给出了不同的笛卡儿坐标系；设 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是 E^3 中的两个正交标架（见图 1），它

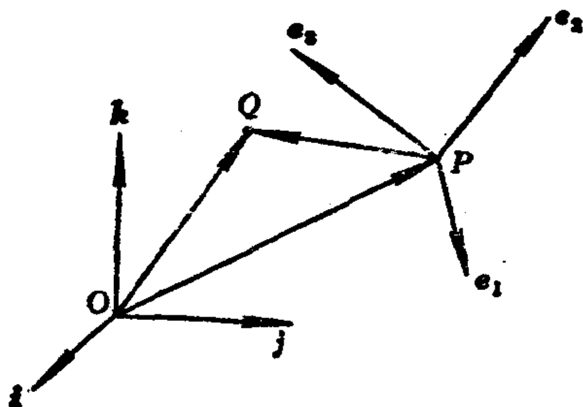


图 1

们的关系由（2）式给出．设点Q关于$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$的坐标是（$x,y,z$），关于$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的坐标是（$x',y',z'$），则

$$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix},$$

另一方面

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\\&=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}+(x',y',z')\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\\&=[a+(x',y',z')\cdot A]\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此，点Q的坐标（x,y,z）和（$x'.y',z'$）之间的关系是

$$(x,y,z)=a+(x',y',z')\cdot A, \tag{6}$$

或

$$\begin{cases}x=a_1+x'a_{11}+y'a_{21}+z'a_{31},\\y=a_2+x'a_{12}+y'a_{22}+z'a_{32},\\z=a_3+x'a_{13}+y'a_{23}+z'a_{33}.\end{cases} \tag{6'}$$

正交标架的重要性还在于它能表示欧氏空间E^3中的刚体运动．所谓刚体运动原来是物理学上的一个概念．如果一个物体在空间E^3中的运动不改变它的形状和大小，只改变它在空间中的位置，那么这个物体的运动就称为刚体运动．要确定一个刚体在空间中的位置只要确定刚体上不共线的三个点的位置就行了．这样，在刚体上装一个正交标架，则这个正交标架在空间中的位置就代表了这个刚体的位置．在某一时刻，对于空间中的任意一点．我们可以把它看作刚体上的一点在此时刻的位置．当刚体在空间中运动时，这个位置随着刚体一起运动．这样，我们得到空间E^3到它自身的一个变换．假定一个刚体上的标架$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$在运动之后变到标架$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$所在的位置（见图2），把这个

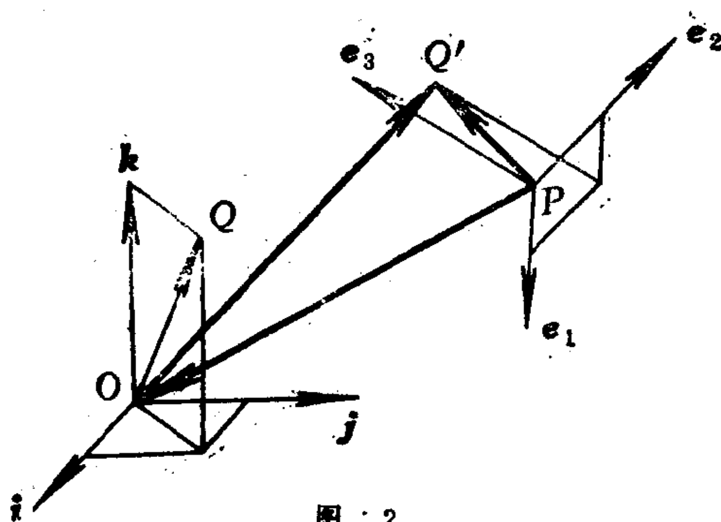


图 2

位移记作σ．那么空间 E^3 中任意一点Q在σ作用下的象点$Q'=\sigma(Q)$ 关于 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的相对位置与Q关于 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 的相对位置是一致的.

设

$$\overrightarrow{OQ}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix},$$

则

$$\overrightarrow{PQ'}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ'}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ'}\\ &=[\boldsymbol{a}+(x,y,z)A]\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这就是说，象点$Q'=\sigma(Q)$ 关于 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 的坐标是

$$(x',y',z')=\boldsymbol{a}+(x,y,z)A, \tag{7}$$

或

$$\begin{cases}x'=a_1+xa_{11}+ya_{21}+za_{31},\\ y'=a_2+xa_{12}+ya_{22}+za_{32},\\ z'=a_3+xa_{13}+ya_{23}+za_{33}.\end{cases} \tag{7'}$$

因此，从$\{O;i,j,k\}$变到$\{P;e_1,e_2,e_3\}$的刚体运动把点$Q=(x,y,z)$变到点$Q'=(x',y',z')$，而坐标(x',y',z')与(x,y,z)之间的关系是由（7′）式给出的．注意到公式（7）和（6）有很大的相似性，但是它们的意义是完全不同的．这种公式上的相似性说明刚体运动在某种意义上可以看作是一个坐标变换．具体一点说，（7）式可以看作关于$\{P;e_1,e_2,e_3\}$的坐标是(x,y,z)的点Q'的坐标变换问题．

我们可以把上面的讨论总结成如下的定理：

定理1　E^3中的刚体运动把一个正交标架变成一个正交标架；反之，对于E^3中任意两个正交标架，则必有E^3的一个刚体运动把其中一个标架变为另一个标架．

很明显，刚体运动看作空间E^3到它自身的变换时，保持空间中任意两点之间的距离不变．从E^3到它自身的一个变换，如果保持任意两点之间的距离不变，则称它是一个等距变换．容易证明，等距变换把共线的三点变为共线的三点，并且保持分比不变；进而可证等距变换是如（7）式给出的线性变换，其中只要求矩阵A是正交矩阵，不要求它的行列式是正的．因此，等距变换把一个单位正交标架变为一个单位正交标架，但是可能把右手系变为左手系．换句话说，等距变换是一个刚体运动或刚体运动与反射的合成．

在空间E^3中取定笛卡儿坐标系之后，几何图形就能用坐标来表示，几何图形所固有的性质自然也可以用坐标来表达，但是其表达式应该与所取的笛卡儿坐标系无关．反过来，几何图形的一个用坐标表示的量如果与坐标系的选取无关，因而它在图形的刚体运动下保持不变，这个量就是几何图形所固有的量．我们所研究的就是图形的这种几何不变量．

除了正交标架以外，我们还可以考虑仿射标架．所谓仿射标架是指一个点P以及放在点P的三个不共面的向量e_1,e_2,e_3所组成的图形$\{P;e_1,e_2,e_3\}$，不要求这三个向量有单位正交性质．

命

$$g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j,\qquad 1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{8}$$

我们称 (g_{ij}) 为仿射标架 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的度量系数．空间 E^3 的刚体运动把仿射标架变为仿射标架，并且保持它的度量系数不变以及保持标架的定向不变．很明显，E^3 中的全体仿射标架的集合可以与 $E^3\times GL(3)$ 建立一一对应，其中 $GL(3)$ 表示非退化 3×3 矩阵的集合．因此 E^3 中全体仿射标架的空间是一个12维的空间．

§2 向量函数

我们用 $\boldsymbol{R}^3$ 表示有序的三个实数的组所构成的三维向量空间，在其中定义了通常的数量积，向量积和混合积．设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(a_1,a_2,a_3),\\ \boldsymbol{b}&=(b_1,b_2,b_3),\\ \boldsymbol{c}&=(c_1,c_2,c_3),\end{aligned} \tag{1}$$

则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i; \tag{2}$$

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，它的定义是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right), \tag{3}$$

因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b},$$

且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系，以及

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}); \tag{4}$$

向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积是

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}, \tag{5}$$

它的几何意义是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所张的平行六面体的体积.

因此，所谓向量函数实际上是指三个有序的实函数. 设有向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$，如果函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$都是 t 的连续函数，则函数 $\boldsymbol{r}(t)$就是连续的. 向量函数$\boldsymbol{r}(t)$的微商和积分的定义与普通函数的微商和积分的定义相同：

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t_0)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{6}$$

$$=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)),\ t_0\in(a,b),$$

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{r}(t_i')\Delta t_i$$

$$=\left(\int_a^b x(t)dt,\ \int_a^b y(t)dt,\ \int_a^b z(t)dt\right), \tag{7}$$

其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是$[a,b]$的任意一个分割，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$t_i'\in[t_{i-1},t_i]$. 由此可见，向量函数的微商和积分分别归结为它的分量函数的微商和积分，因此向量函数的可微性和可积性归结为它的分量函数的可微性和可积性.

现在假定 $\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{c}(t)$ 是三个可微的向量函数，它们的数量积、向量积和混合积的微商有下列公式：

定理 1 (i) $(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t))'=\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}'(t)$；

(ii) $(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))'=\boldsymbol{a}'(t)\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}'(t)$；

(iii) $(\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{c}(t))'=(\boldsymbol{a}'(t),\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{c}(t))$

$$+(\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}'(t),\boldsymbol{c}(t))+(\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{c}'(t)).$$

它们的证明是直接的. 下面的命题给出了一些有特殊性质的向量函数的判定条件，以后会经常引用.

定理 2 设$\boldsymbol{a}(t)$ 是一个非零连续可微函数，则

(i) 函数 $\boldsymbol{a}(t)$的长度是常数，当且仅当 $\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)\equiv 0$；

(ii) 函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变，当且仅当$\boldsymbol{a}'(t)\times\boldsymbol{a}(t)\equiv 0$；

(iii) 函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 与一个确定的方向垂直，当且仅当$(\boldsymbol{a}(t),$

$\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{a}''(t)) \equiv 0$.

证明 (i) 因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}(t)|^2 = 2\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)$，所以$|\boldsymbol{a}(t)|^2=$常数，当且仅当 $\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=0$.

(ii) 若 $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变，则有单位常向量 $\boldsymbol{b}$，使得 $\boldsymbol{a}(t)$为

$$\boldsymbol{a}(t)=f(t)\cdot\boldsymbol{b},$$

其中 $f(t)$是连续可微函数. 因此

$$\boldsymbol{a}'(t)=f'(t)\cdot\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a}'(t)\times\boldsymbol{a}(t)=0.$$

反之，设 $\boldsymbol{a}'(t)\times\boldsymbol{a}(t)=0$，命 $\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{a}(t)/|\boldsymbol{a}(t)|$，则$|\boldsymbol{b}(t)|=1$. 由 (i) 可知 $\boldsymbol{b}'(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=0$，即 $\boldsymbol{b}'(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=0$. 由定义可知

$$\boldsymbol{a}(t)=f(t)\cdot\boldsymbol{b}(t),$$

其中 $f(t)=|\boldsymbol{a}(t)|$，则

$$\boldsymbol{a}'(t)=f'(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)+f(t)\cdot\boldsymbol{b}'(t),$$
$$\boldsymbol{a}'(t)\times\boldsymbol{a}(t)=f(t)\cdot\boldsymbol{b}'(t)\times\boldsymbol{a}(t)=0,$$

因此 $\boldsymbol{b}'(t)\parallel\boldsymbol{a}(t)$. 由于 $\boldsymbol{b}'(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=0$，故 $\boldsymbol{b}'(t)=0$，即 $\boldsymbol{b}(t)$ 是常向量，即向量函数 $\boldsymbol{a}(t)$的方向不变.

(iii) 设有单位常向量 $\boldsymbol{b}$，使得 $\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}\equiv 0$. 对此求导得

$$\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{b}\equiv 0,\qquad \boldsymbol{a}''(t)\cdot\boldsymbol{b}\equiv 0,$$

因此，$\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{a}'(t)$，$\boldsymbol{a}''(t)$都落在 $\boldsymbol{b}$ 的正交补空间内，即对于任意的 t，向量 $\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{a}'(t)$，$\boldsymbol{a}''(t)$是共面的，于是

$$(\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{a}'(t),\boldsymbol{a}''(t))\equiv 0.$$

反之，若上式成立，则

$$(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t))\cdot\boldsymbol{a}''(t)\equiv 0.$$

若 $\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)\equiv 0$，则由(2)式可知$\boldsymbol{a}(t)$ 有确定的方向；若$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)\neq 0$，命 $\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)$，于是

$$\boldsymbol{b}'(t)=\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}''(t),$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{b}'(t)&=\boldsymbol{b}(t)\times(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}''(t))\\&=(\boldsymbol{b}(t)\cdot\boldsymbol{a}''(t))\boldsymbol{a}(t)-(\boldsymbol{b}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t))\boldsymbol{a}''(t)\\&=(\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{a}'(t),\boldsymbol{a}''(t))\boldsymbol{a}(t)\equiv 0,\end{aligned}$$

故 $b(t)$ 有确定的方向. 命 $\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{b}(t)/|\boldsymbol{b}(t)|$, 则 $\boldsymbol{b}_0$ 是常向量, 并且

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}_0\equiv 0.$$

注记 在证明(iii)的充分性时, 已假定 $\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)$没有孤立零点. 若 $\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)$ 有孤立零点 t_0, 则可以构造例子使得在 t_0 的任意一个邻域内, (iii)的充分性不成立. 以后, 为了定理叙述的简便性, 仍保留了这种不完备性, 但是读者在定理的证明过程中可以容易地看出这一点.

第二章　曲 线 论

§1　参 数 曲 线

在这一节我们要对所研究的曲线作一些规定．在直观上，E^3 中的一条曲线是指 E^3 中的一点随着时间 t 的变化而运动所得的轨迹．换言之，E^3 中的一条曲线可以表示成从区间 $[a,b]$ 到 E^3 的一个连续映射

$$p: [a,b]\to E^3, \tag{1}$$

称为参数曲线．在 E^3 中取定一个右手笛卡儿坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，则曲线上的点 $p(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 与向径 $\overrightarrow{Op}(t)$ 是等同的．命 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{Op}(t)$，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

因此，映射（1）等价于三个实函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$．通常在固定的坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，把曲线记成

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\qquad t\in[a,b], \tag{3}$$

其中 t 是曲线的参数，（3）式称为**曲线的参数方程．**

由定义可知，

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

$$=(x'(t),y'(t),z'(t)).$$

如果坐标函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 是可微的，则称曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 是可微的．显然，这个概念与笛卡儿坐标的选取无关．

导数 $\boldsymbol{r}'(t)$ 有明显的几何意义．$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ 表示从点 $\boldsymbol{r}(t)$ 到邻近点 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的向量，$\dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ 代表经过点 $\boldsymbol{r}(t)$ 和

$r(t+\Delta t)$ 的割线 l 的方向向量．当 $\Delta t\to 0$，割线 l 的极限位置就是曲线在点 $r(t)$的切线．如果 $r'(t)\neq 0$，则 $r'(t)$是曲线在 $r(t)$ 的切线的方向向量，称为参数曲线的**切向量**．这时，曲线在点 $r(t)$ 有完全确定的切线．这样的点称为曲线的正则点．曲线在正则点的**切线方程**是

$$X(u)=r(t)+ur'(t), \tag{4}$$

其中 t 是固定的，u 是切线上点的参数，$X(u)$ 是切线上的点的向径（见图3）．

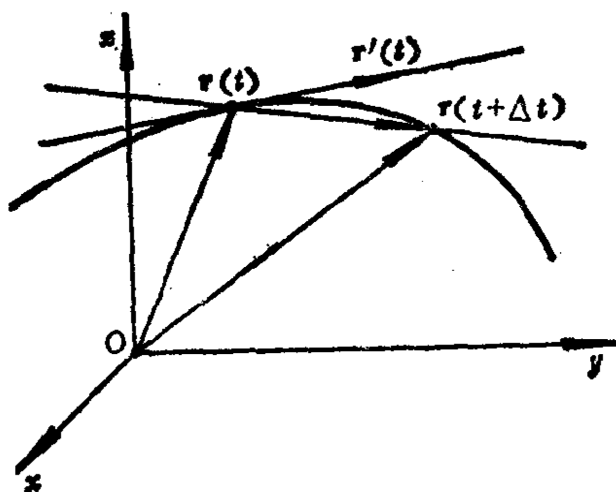


图 3

我们假定所研究的曲线满足下面两个条件：

(i) 至少是三次连续可微的；

(ii) 曲线上处处是正则点，即对任意的 t，有 $r'(t)\neq 0$．

我们把参数增大的方向称为参数曲线的正向；显然，$r'(t)$ 正好指向曲线的正向．

曲线的参数方程不是唯一的．如果在空间中取另一个笛卡儿坐标系，则曲线的方程就要作一个相应的变换．更重要的是参数的选取也不是唯一的．为了保证曲线的正则性条件保持不变，我们要求曲线所容许的参数变换 $t=t(u)$ 满足以下两个条件：

(i) $t(u)$ 是 u 的三次以上连续可微函数；

(ii) $t'(u)$处处不为零．

如上的参数变换在正则曲线的参数方程之间建立了一个等价关系．实际上，我们所考虑的曲线是正则参数曲线在上述等价关系下的等价类，等价的参数曲线看作是同一条曲线．

如果把条件(ii) 换成 $t'(u)>0$，则容许参数变换还保持曲线的正向不变．在这种意义下的等价类称为**有向正则曲线**．

例 1 圆螺线：$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$，其中 a,b 是常数，$a>0$．它可以看作一个点绕子轴作半径为 a 的等速圆周运动与该点沿 z 轴方向作等速直线运动的合成（见图 4），即

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)+(0,0,bt).$$

显然，

$$\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b),$$

$$|\boldsymbol{r}'(t)|^2=a^2+b^2>0.$$

这是一条正则曲线．

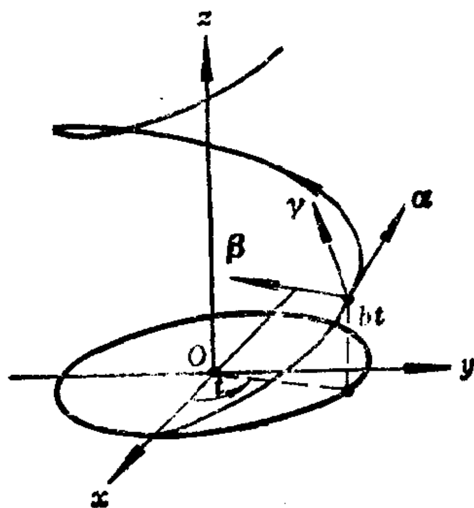


图 4

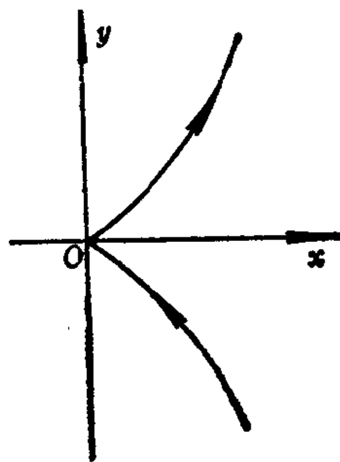


图 5

例 2 平面曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=(t^3,\ t^2).$$

这是一条可微曲线，但是 $\boldsymbol{r}'(0)=(0,0)$，所以它不是正则曲线（见图 5）．从图形上看，该曲线在 $t=0$处有一个尖点．由此可见，可微的参数曲线与直观上光滑的曲线（即切线连续变化的曲线）

是不一致的．在尖点尽管有唯一确定的切线，但是把切线看成有向直线时，在通过尖点时，切线要转动180°．我们还很容易构造出可微参数曲线的例子（比如锯齿状曲线），它在非正则点没有确定的切线．对于正则曲线不会出现这种情形，也就是正则参数曲线和直观上光滑的曲线是很好地吻合的．

用参数方程表示曲线是一种十分一般的方法，而且使用起来比较方便，特别是在对曲线进行运算和变换时更是如此．有时候曲线也可以用坐标之间的函数关系来表示：

$$y=y(x), \qquad z=z(x). \tag{5}$$

但是，这只是参数方程的一种特殊情形，即可以把 x 取作曲线的参数，记成

$$\boldsymbol{r}(x)=(x,y(x),z(x)). \tag{6}$$

曲线的这种表示必定是处处正则的．由于在上述表达式中，坐标 x,y,z 的地位是不对等的，因此不是所有的曲线都能如此表示的．然而，对于正则曲线，在某个邻域内总是可以选取某个坐标作为曲线的参数（习题4），表成类似于（5）或（6）的形式．

曲线还能用坐标的隐式方程来表示．例如，一条曲线可以是两个联立方程

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7}$$

的解(x,y,z)的集合，其中 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 是两个已知函数．从直观上看，这两个方程分别代表两张曲面，而所考虑的曲线则是这两张曲面的交线．如果这条曲线的参数方程是 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，代入方程（7）便得到恒等式

$$f(x(t),y(t),z(t))\equiv 0,$$
$$g(x(t),y(t),z(t))\equiv 0.$$

对 t 求导得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z'(t)=0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot y'(t)+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot z'(t)=0, \tag{8}$$

这说明切向量 $r'(t)$ 平行于

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y},\ \frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

若上述向量不为零，即矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{9}$$

的秩为2，则由隐函数定理，从方程组（7）可以解出其中两个坐标作为第三个坐标的函数．例如，当

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，可解出

$$y=y(x),\quad z=z(x),$$

使得

$$f(x,y(x),z(x))\equiv 0,$$
$$g(x,y(x),z(x))\equiv 0,$$

于是该曲线的方程是

$$r(x)=(x,y(x),z(x)),$$

由此可见，如果 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$是连续可微函数，$p=(x_0,y_0,z_0)$ 是方程（7）的解，且矩阵（9）在点 p 的秩是2，则方程组（7）在点 p 的一个邻域内的解是一条经过 p 点的正则曲线．

习　　题

1．将一个半径为 r 的圆盘在 XY 平面内沿 X 轴作无滑动的滚动，写出圆盘上一点的轨迹方程（这条曲线称为旋轮线，或摆线）．

2．证明：曲线 $r(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ 的切线与某个确定的方向成定角．

3．设平面曲线 C 与同一平面的一条直线 l 相交于正则点 p，并且落在直线 l 的一侧．证明：l 是曲线 C 在点 p 的切线．

4．证明：若曲线 $r(t)$ 在点 t_0 有 $x'(t_0)\neq 0$，则该曲线在 t_0 的一个邻域内可以表示成

$$y=f(x),\qquad z=g(x).$$

5．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & z\geqslant 0 \\ x^2+y^2=x \end{cases}$ 的参数方程．

§2　曲线的弧长

设 E^3 中一条正则曲线 C 的方程是 $r=r(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$. 命

$$S=\int_a^b |r'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

则 S 是该曲线的一个不变量，即它与空间 E^3 中的笛卡儿坐标系的选取无关，也与曲线的保持定向的容许参数变换无关．前者是因为在笛卡儿坐标变换下（第一章 §1 的（6′）式），$|r'(t)|$ 是不变的．关于后者，不妨设参数变换是

$$t=t(u),\quad t'(u)>0,\quad \alpha\leqslant u\leqslant \beta, \tag{2}$$

并且

$$t(\alpha)=a,\qquad t(\beta)=b,$$

因此

$$\left|\frac{\mathrm{d}r(t(u))}{\mathrm{d}u}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t(u))\right|\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}, \tag{3}$$

根据积分变量替换公式有

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\ (t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t\ (u))\right|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_\alpha^\beta\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t(u))}{\mathrm{d}u}\right|\mathrm{d}u,$$

所以 S 与参数变换（2）是无关的.

不变量 S 的几何意义是该段曲线的弧长. 容易证明,

$$\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t=\lim_{\max|\Delta t_i|\to 0}\sum_{i=1}^n|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})|,$$

其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是区间 $[a,\ b]$的任意一个分割（见图6）. 显然，上式右端的和式是顶点依次为 $\boldsymbol{r}(t_0)$，$\boldsymbol{r}(t_1)$，$\cdots$，$\boldsymbol{r}(t_n)$ 的折线的长度，因此$\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t$ 是将曲线不断细分所得折线的长度的极限，也就是该曲线的长度.

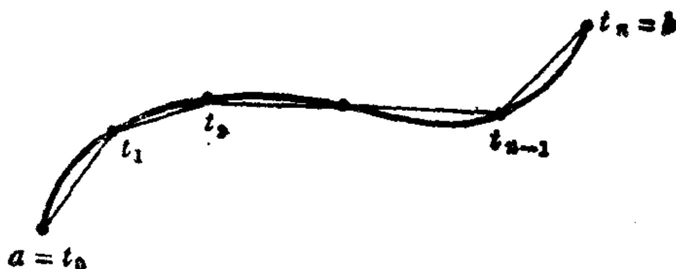


图 6

现在令

$$s(t)=\int_a^t|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t, \tag{4}$$

则 $s(t)$ 是曲线 C 上从 a 到 t 的弧长. 由于 $s(t)$ 是 t 的三次以上连续可微的函数，并且

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'(t)|>0,$$

所以（4）式给出了曲线 C 的保持定向的容许参数变换. 换句话说，我们总是可以把正则曲线的弧长作为它的参数，这种参数

称为**弧长参数**．弧长参数的意义在于它是由曲线本身确定的（至多差一个常数），与曲线的坐标表示和参数选择都是无关的．由（4）式得到

$$ds = |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \tag{5}$$

从（3）式可知，ds 也是曲线的不变量，称为曲线的弧长元素．

注意到积分（4）往往不能用显式表示出来，所以真要把曲线的弧长函数算出来常常是很困难的，或做不到的．下面的命题给出了参数 t 是弧长参数的特征，是十分有用的．

定理1　设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 是 E^3 中的一条正则曲线，则 t 是它的弧长参数的充分必要条件是 $|\boldsymbol{r}'(t)|=1$.

证明　因为 $\frac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'(t)|$，所以 $ds=dt$ 当且仅当 $|\boldsymbol{r}'(t)|=1$.

上述命题的直观意义是：曲线以弧长为参数的充要条件是它的切向量场是单位切向量场．为了强调已经把弧长取为曲线的参数了，我们通常用“·”表示对于弧长参数的微商，如 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 等等．

习　题

1．设下面的常数 $a>0$，求曲线在指定范围内的弧长：

(1) $\boldsymbol{r}(t)=(a\,\mathrm{ch}\,t, a\,\mathrm{sh}\,t, at)$，$0\leqslant t\leqslant b$.

(2) 悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$，$[0,x]$.

(3) 曳物线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, a\ln(\sec t+\mathrm{tg}\,t)-a\sin t)$，$[0,t]$.

2．求下列曲线的单位切向量场 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$：

(1) 圆螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$，$a>0$.

(2) $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

3. 设曲线 C 是下面两个曲面的交线：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x=a\,\mathrm{ch}\frac{z}{a},\ a,b>0.$$

求 C 从点 $(a,0,0)$ 到点 (x,y,z) 的弧长.

4. 求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，使得 $\boldsymbol{r}(0)=(1,0,-5)$，$\boldsymbol{r}'(t)=(t^2, t, e^t)$.

§3 曲线的曲率和 Frenet 标架

设曲线 C 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其中 s 是曲线的弧长参数. 由上节的定理 1 可知，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)$是曲线 C 的单位切向量场. 命

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s). \tag{1}$$

下面我们要研究如何刻划曲线的弯曲程度. 从直观上看，$\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是曲线 C 在 s 处的方向向量，因此当一点沿曲线以单位速率行进时，方向向量转动的快慢反映了曲线的弯曲程度，而方向向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$转动的快慢恰好是用$|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|$来衡量的.

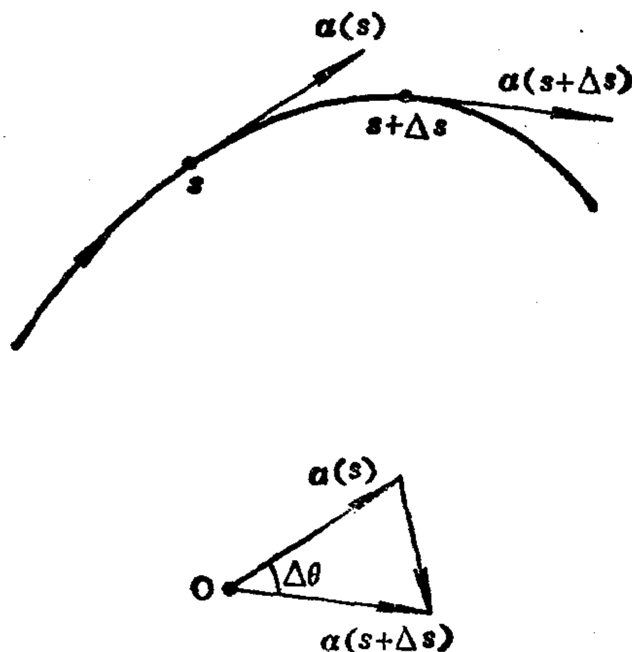


图 7

定理1 设 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的单位切向量场，s 是弧长参数，用 $\Delta\theta$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$之间的夹角，则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|. \tag{2}$$

证明 我们把曲线上的单位切向量$\boldsymbol{\alpha}(s)$平行移动到原点 O，则它的端点便描出一条单位球面上的曲线，$\Delta\theta$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 所张的角（见图7），而 $|\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\alpha}(s)|$ 正好是它所对的弦长，所以

$$\begin{aligned}|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\alpha}(s)|}{|\Delta s|}\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\left|\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta s|}\\&=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\theta|}{|\Delta s|}.\end{aligned}$$

定义 命 $\kappa=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|$，我们称 κ 为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在 s 处的**曲率**，称 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 为该曲线的**曲率向量**.

把曲线 C 的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 平行移动到原点，其端点所描出的曲线称为**曲线的切线象**，它的参数方程就是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\alpha}(s). \tag{3}$$

一般说来，s 不会是切线象的弧长参数. 切线象的弧长元素是

$$d\tilde{s}=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|ds=\kappa ds, \tag{4}$$

所以

$$\kappa=\frac{d\tilde{s}}{ds}, \tag{5}$$

即曲线的曲率 κ 是曲线的切线象的弧长元素与曲线的弧长元素之比.

因为$|\boldsymbol{\alpha}(s)|=1$，由第一章§2的定理 2 可知$\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=0$，所以曲率向量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 是曲线的一个法向量场. 如果 $\kappa\neq 0$，则向

量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 有完全确定的方向向量，将这个方向向量记作 $\boldsymbol{\beta}(s)$，称为曲线的**主法向量**. 这样，曲率向量 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ 可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\kappa\boldsymbol{\beta}(s). \tag{6}$$

由曲线的单位切向量场 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 和主法向量 $\boldsymbol{\beta}(s)$，唯一地确定了曲线的第二个法向量场

$$\boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}(s), \tag{7}$$

称为曲线的**次法向量场**. 这样，在正则曲线上曲率 $\kappa\neq 0$ 的点有一个完全确定的右手单位正交标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$，它的确定不受曲线的保持定向的参数变换的影响. 我们把它称为曲线在该点的 **Frenet 标架**.

如上所述，在 $\kappa=0$ 的点，Frenet 标架是没有定义的. 如果 $\kappa\equiv 0$，则 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\equiv 0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}(s)=$常向量，该曲线是一条直线. 通常我们在该直线的任意一点取定两个彼此正交的单位法向量 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$，然后将它们平行移动，把所得到的平行的右手正交标架场看成是沿直线的 Frenet 标架场. 但是若使 $\kappa(s_0)=0$ 的点 s_0 是孤立点，则情形就变得十分复杂了. 在 s_0 的两侧，由于曲线的曲率不等于零，故有确定的 Frenet 标架场. 如果在 $s\to s_0\pm 0$ 时，它们的极限是同一个标架，则可以把 Frenet 标架场的定义域扩充到这个孤立点 s_0. 但是在十分一般的情况，s_0 两侧的 Frenet 标架场在 $s\to s_0\pm 0$ 时的极限是不一致的，因此不可能把 Frenet 标架场的定义域扩充到 s_0（见习题 5）.

因为沿着曲率不等于零的曲线可以内在地确定它的 Frenet 标架场，所以原来在 E^3 中的一条曲线便变成了 E^3 上的正交标架空间中的一条曲线. 这种看法有基本的重要性，因为我们讨论 E^3 中曲线的存在性和唯一性都是把它看成正交标架空间中的曲线来进行的.

在曲率 $\kappa\neq 0$ 的点，Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 的三根轴分别称为曲线的**切线**、**主法线**和**次法线**；三个坐标面分别称为曲线在该点的**法平面**（以 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 为法向量）、**从切平面**

（以 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 为法向量）和密切平面（以 $\gamma(s)$ 为法向量），它们的方程分别为

$$\text{法平面}\qquad (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{\alpha}(s)=0,$$
$$\text{从切平面}\qquad (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{\beta}(s)=0,$$
$$\text{密切平面}\qquad (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}(s))\cdot\boldsymbol{\gamma}(s)=0,$$

其中$\boldsymbol{X}$ 是平面上动点的向径.

现在我们叙述曲线的曲率和 Frenet 标架的计算方法. 如果曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 以弧长 s 为参数，则曲线的曲率及 Frenet 标架可以根据定义直接算出. 实际上,

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s},\quad \kappa=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)|=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|. \tag{8}$$

如果 $\kappa\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\beta}(s)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|},\quad \boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|}. \tag{9}$$

如果曲线的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, t 不是弧长参数，则

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'(t)|,$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},\qquad \boldsymbol{r}'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot\boldsymbol{\alpha}(t).$$

对后一式再微分得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''(t)&=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}'(t)|}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\alpha}(t)+|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}'(t)|}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\alpha}(t)+|\boldsymbol{r}'(t)|^2\cdot\kappa\boldsymbol{\beta}(t),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)&=|\boldsymbol{r}'(t)|^3\cdot\kappa(\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t))\\&=|\boldsymbol{r}'(t)|^3\cdot\kappa\boldsymbol{\gamma}(t),\end{aligned}$$

由此得到

$$\kappa=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3},\qquad \boldsymbol{\gamma}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}(t)&=\boldsymbol{\gamma}(t)\times\boldsymbol{\alpha}(t)\\&=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)|^2\boldsymbol{r}''(t)-(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t))\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}.\end{aligned}\tag{10}$$

例1 求圆螺旋线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 的曲率和 Frenet 标架（$a>0$）（参看图4）.

解 求导得到

$$\boldsymbol{r}'=(-a\sin t,a\cos t,b),$$
$$\boldsymbol{r}''=(-a\cos t,-a\sin t,0),$$
$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=(ab\sin t,\ -ab\cos t,a^2),$$

因此

$$\kappa=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}=a,$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}=(-\cos t,-\sin t,0).$$

因为$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$，故 $s=\sqrt{a^2+b^2}\,t$，因此圆螺旋线以弧长 s 为参数的方程是

$$\boldsymbol{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

例2 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x^2+y^2=x\end{cases}$ 在 $(0,0,1)$ 处的曲率 κ 和 Frenet 标架.

解 很明显，这是球面和圆柱面的交线，分为两部分．我们所考虑的点落在上半球面（见图 8）．解这道题有两种做法．一种方法是把曲线在 (0,0,1)的邻近部分用参数方程表示出来，然后按例 1 的办法进行计算．例如，我们可以把这段曲线用参数方程表示为：

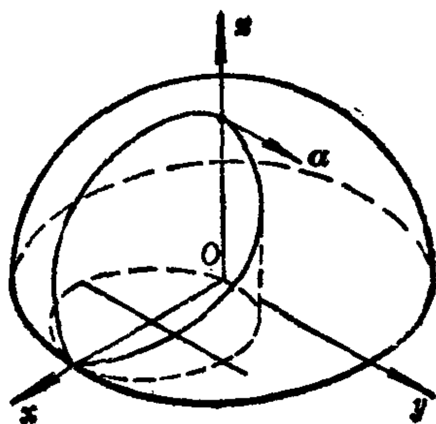


图 8

$$r(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t,\ \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}\right),$$

点 (0,0,1) 对应于 $t=\pi$．但是有时用参数方程表示两个曲面的交线比较复杂，所以可以采用在此所介绍的第二种方法．

假定曲线的参数方程是

$$x=x(s),\qquad y=y(s),\qquad z=z(s),\tag{11}$$

其中 s 是弧长参数，并且 $s=0$ 对应于点 (0,0,1)．因此函数 $x(s)$，$y(s)$，$z(s)$满足下列方程组

$$\begin{cases}x^2(s)+y^2(s)+z^2(s)=1,\\ x^2(s)+y^2(s)\qquad\qquad =x(s),\\ \dot{x}(s)^2+\dot{y}(s)^2+\dot{z}^2(s)=1.\end{cases}\tag{12}$$

将前两式关于 s 求导得到

$$\begin{cases}\dot{x}(s)x(s)+\dot{y}(s)y(s)+\dot{z}(s)z(s)=0,\\ \dot{x}(s)x(s)+\dot{y}(s)y(s)=\dfrac{1}{2}\dot{x}(s).\end{cases}\tag{13}$$

在上式令 $s=0$ 得到

$$\dot{z}(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=0,\tag{14}$$

故得 $|\dot{y}(0)|=1$．不妨取 $\dot{y}(0)=1$，于是

$$\alpha(0)=\dot{r}(0)=(0,1,0).$$

将（12）的第 3 式和（13）式再求导，得到

$$\begin{cases}\ddot{x}(s)\dot{x}(s)+\ddot{y}(s)\dot{y}(s)+\ddot{z}(s)\dot{z}(s)=0,\\ \ddot{x}(s)x(s)+\ddot{y}(s)y(s)+\ddot{z}(s)z(s)=-1,\\ \ddot{x}(s)x(s)+\ddot{y}(s)y(s)+\dot{x}(s)^2+\dot{y}(s)^2=\dfrac{1}{2}\ddot{x}(s).\end{cases}$$

令 $s=0$ 得到

$$\ddot{y}(0)=0,\quad \ddot{z}(0)=-1,\quad \ddot{x}(0)=2, \tag{15}$$

即

$$\ddot{r}(0)=(2,0,-1).$$

由定义可知

$$\kappa=|\ddot{r}(0)|=\sqrt{5},$$

$$\beta(0)=\frac{\ddot{r}(0)}{|\ddot{r}(0)|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right),$$

$$\gamma(0)=\alpha(0)\times\beta(0)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

习　题

1. 求曲线的曲率：

(1) $r=\left(at,a\sqrt{2}\ln t,\dfrac{a}{t}\right)\quad(a>0)$，

(2) $r=(3t-t^3,3t^2,3t+t^3)$，

(3) $r=(a(t-\sin t),a(1-\cos t),bt)\quad(a>0)$，

(4) $r=(\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t)$.

2. 求曲线的密切平面方程：

(1) $r(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$，$a^2+b^2\neq 0$.

(2) $r(t)=(a\cos t,b\sin t,e^t)$，在 $t=0$ 处，其中 $ab\neq 0$.

3. 求曲线 $\begin{cases}x+\operatorname{sh}x=y+\sin y,\\ z+e^z=(x+1)+\ln(x+1)\end{cases}$ 在（0,0,0）处的曲率和 Frenet 标架.

4. 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2-z^2=3 \end{cases}$$

在 (2,2,1) 处的曲率和密切平面方程.

5. 设曲线的方程是

$$r(t)=\begin{cases} (e^{-1/t^2},t,0), & t<0, \\ (0,0,0), & t=0, \\ (0,t,e^{-1/t^2}), & t>0. \end{cases}$$

证明：这是一条正则曲线，并且在 $t=0$ 处的曲率为零. 求这条曲线在 $t\neq0$ 处的 Frenet 标架，并考察它在 $t\to\pm0$ 时的极限.

§4 挠率和 Frenet公式

在§3已经说过，曲线在一点的切线和主法线所张的平面是密切平面，它的法向量是曲线的次法向量 γ. 如果曲线本身落在一个平面内，则该平面就是曲线的密切平面，于是它的法向量 γ 是常向量. 如果曲线不是平面曲线，则 γ 必定不是常向量（见本节的定理 1）. 根据 §3 的定理 1，$|\dot{\alpha}|$ 反映了曲线的切线方向的转动快慢，同理$|\dot{\gamma}|$反映了曲线的密切平面方向的转动快慢，因而它刻画了曲线偏离平面曲线的程度，即曲线扭曲的程度.

因为 γ 是单位向量场，故$\dot{\gamma}\perp\gamma$. 此外，$\gamma=\alpha\times\beta$，所以

$$\dot{\gamma}=\dot{\alpha}\times\beta+\alpha\times\dot{\beta}=\alpha\times\dot{\beta},$$

这说明$\dot{\gamma}\perp\alpha$. 于是$\dot{\gamma}$必与 β 是共线的，不妨设

$$\dot{\gamma}=-\tau\beta, \tag{1}$$

因此

$$\tau=-\dot{\gamma}\cdot\beta, \tag{2}$$

$$|\tau|=|\dot{\gamma}|.$$

定义 $\tau=-\dot{\gamma}\cdot\beta$ 称为曲线的**挠率**.

在§3已经讲过，一条曲线是直线的充分必要条件是它的曲率

$\kappa\equiv 0$. 容易证明，平面曲线可以用它的挠率恒等于零来刻画.

定理1 一条非直线的曲线是平面曲线的充分必要条件是它的挠率 $\tau\equiv 0$.

证明 必要性已在本节开头的讨论中阐明了. 现在设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$不是直线，$\kappa\neq 0$，但是 $\tau\equiv 0$. 这时，曲线有完全确定的 Frenet 标架场，并且$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\equiv 0$. 由此可见 $\boldsymbol{\gamma}=$常向量. 但是

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}=0,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma})=0,$$

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0))\cdot\boldsymbol{\gamma}=0,$$

这说明曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$落在经过点 $\boldsymbol{r}(s_0)$、以常向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为法向量的平面内.

根据曲率、挠率以及 Frenet 标架的定义，我们已经有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s),\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\kappa\boldsymbol{\beta}(s),\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)=-\tau\boldsymbol{\beta}(s).\end{cases}\tag{3}$$

下面我们要求$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)$. 由于$\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$构成空间 E^3 的一个标架，所以向量 $\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)$ 总可以表示成 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的线性组合，不妨设

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=a\boldsymbol{\alpha}(s)+b\boldsymbol{\beta}(s)+c\boldsymbol{\gamma}(s).$$

将上式分别与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 作内积，并利用标架向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的单位正交性，我们有

$$a=\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\alpha}=-\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\beta}=-\kappa,$$

$$b=\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta}=0,$$

$$c=\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\gamma}=-\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\beta}=\tau,$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=-\kappa\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau\boldsymbol{\gamma}(s).\tag{4}$$

综合起来，我们便得到 Frenet 标架场 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 沿曲线运动的公式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}}(s)= \quad \boldsymbol{\alpha}(s), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)= \quad \kappa\boldsymbol{\beta}(s), \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=-\kappa\ \boldsymbol{\alpha}(s) \quad +\tau\boldsymbol{\gamma}(s), \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)= \quad -\tau\boldsymbol{\beta}(s). \end{cases} \tag{5}$$

上述公式称为 Frenet 公式，是曲线论中最基本、最重要的公式，曲线的性质都可以从这个公式导出来. Frenet 公式中的后三式可以进一步写成矩阵的形状：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(s) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

注意到上式中的系数矩阵是一个反对称矩阵，这个性质不是 Frenet 标架所特有的. 一般地，沿曲线的任意一个正交标架场的微商都有这个性质（见习题 7）.

下述定理的证明要求我们能够熟练地运用 Frenet 公式.

定理 2 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是空间挠曲线，s 是弧长参数. 如果该曲线落在一个球面上，则它的曲率和挠率必定满足关系式

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=\text{常数}. \tag{7}$$

证明 所谓空间挠曲线是指其曲率和挠率均不为零的曲线. 如果曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 落在一个球面上，则必有常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 及常数 a 使得下面的关系式成立：

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)^2=a^2.$$

将上式两边对 s 求导，得到

$$\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)=0,$$

故 $\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0$ 落在曲线的法平面上. 不妨设

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0=\lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s)+\mu(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \tag{8}$$

再次求导得到

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=-\lambda\kappa\boldsymbol{\alpha}(s)+(\dot{\lambda}-\mu\tau)\boldsymbol{\beta}(s)+(\lambda\tau+\dot{\mu})\boldsymbol{\gamma}(s),$$

因此

$$\lambda\kappa = -1, \qquad \dot{\lambda} = \mu\tau, \qquad \dot{\mu} = -\lambda\tau, \tag{9}$$

故得

$$\lambda = -\frac{1}{\kappa},$$
$$\mu = \frac{\dot{\lambda}}{\tau} = -\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right). \tag{10}$$

代入（8）式得到

$$\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}_0 = -\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\beta}(s) - \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{\gamma}(s),$$

因此

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2 = a^2.$$

注记 从上面的推导（(9)的第三式)还直接得到

$$\frac{\tau}{\kappa} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right] = 0\,. \tag{11}$$

实际上，（11）式可以作为（7）式的推论.

最后我们给出挠率的计算公式．设曲线的方程是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，在§3中已经计算出

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{r}'(t)|,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha} \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}\left(|\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}''(t) - \frac{\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t)\right).\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{\gamma}$ 对 t 求导，并且用 Frenet 公式，得到

$$-\tau\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'''}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}\right)\cdot(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''),$$

两边用 $\boldsymbol{\beta}$ 作内积便得到

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|^2}. \tag{12}$$

如果 t 是弧长参数 s，则有

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}. \tag{13}$$

推论 1 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是平面曲线的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))\equiv 0.$$

习 题

1. 计算§3习题 1 中各曲线的挠率.

2. 求§3习题 3 中的曲线在 $(0,0,0)$ 处的挠率.

3. 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的挠率是非零常数，求曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\beta}(s)-\int\boldsymbol{\gamma}(s)\mathrm{d}s$$

的曲率和挠率.

4. 证明：满足条件

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=\text{常数}$$

的空间挠曲线或者是常曲率的曲线，或者是球面上的一条曲线.

5. 试求沿曲线定义的向量场 $\boldsymbol{\rho}(s)$，使得以下各式同时成立：

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\boldsymbol{\rho}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=\boldsymbol{\rho}(s)\times\boldsymbol{\beta}(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\boldsymbol{\rho}(s)\times\boldsymbol{\gamma}(s).$$

6. 证明：

(1) 若曲线在每一点处的切线都经过一个定点，则该曲线必是一条直线；

(2) 若曲线在每一点处的密切平面都经过一个定点，则该曲线必是一条平面曲线；

(3) 若曲线在每一点处的法平面都经过一个定点，则该曲线必是一条球面曲线.

7. 设 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{a}_1(s),\boldsymbol{a}_2(s),\boldsymbol{a}_3(s)\}$ 是定义在曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 上的单位正交标架场，命

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_i}{\mathrm{d}s}=\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}\boldsymbol{a}_j,\quad 1\leqslant i\leqslant 3,$$

证明：$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=0$.

8. 证明：曲线

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3},\ \frac{(1-s)^{3/2}}{3},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right),\quad -1<s<1$$

以 s 为弧长参数．并求曲线的曲率、挠率和 Frenet 标架场．

9. 如果 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线象．证明：该曲线的曲率和挠率分别是

$$\kappa_\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2},\qquad \tau_\sigma=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left[1+\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2\right]}.$$

并求它的 Frenet 标架场．

10. 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的 Frenet 标架场是$\{\boldsymbol{r}(t);\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t),\boldsymbol{\gamma}(t)\}$．证明：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\alpha}'')\cdot(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\gamma}'')=\varepsilon\cdot|\boldsymbol{\alpha}'|^3\cdot|\boldsymbol{\gamma}'|^3$，其中 $\varepsilon=\operatorname{sign}\tau$.

§5 曲线论基本定理

根据前面各节的讨论，我们已经知道正则参数曲线的弧长参数、曲率和挠率都是与曲线的保持定向的容许参数变换无关的．实际上，弧长参数的这种不变性在§2中已经作过讨论，而曲率、挠率是通过曲线的方程关于弧长参数的各次微商、然后作适当的代数运算得到的，因此也是内在的．很明显，这三个量与空间 E^3 中的笛卡儿坐标的选取也是无关的．实际上，这三个量的计算公式都是用曲线的向量方程给出的，这本身就蕴含着它们不依赖于空间笛卡儿坐标系的选取．此外，在第一章§1中已经解释过，空间E^3上的刚体运动在某种意义上相当于空间笛卡儿坐标系

的一个变换，因此，弧长、曲率、挠率在曲线经受空间的一个刚体运动时是不变的．换句话说，曲线的弧长、曲率、挠率这三个量是由曲线本身的形状决定的，与它的参数表示、与它在空间E^3中的位置都是无关的．反过来，这三个量对于确定曲线的形状已经是足够了，即这三个量是曲线形状的完全不变量系统．我们把这个论断叙述成下面的基本定理：

定理1　设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(s)$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$是 E^3 中两条以弧长 s 为参数的正则曲线，如果它们的曲率处处不为零，并且 $\kappa_1(s)=\kappa_2(s)$，$\tau_1(s)=\tau_2(s)$，则必存在 E^3 的一个刚体运动σ，它把曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$ 变为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(s)$．

证明　由于这两条曲线的曲率不为零，我们可以考虑它们在$s=0$处的 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}_1(0);\boldsymbol{\alpha}_1(0),\boldsymbol{\beta}_1(0),\boldsymbol{\gamma}_1(0)\}$ 和 $\{\boldsymbol{r}_2(0);\boldsymbol{\alpha}_2(0),\boldsymbol{\beta}_2(0),\boldsymbol{\gamma}_2(0)\}$．由于它们都是右手正交标架，根据第一章§2定理1，存在 E^3 的一个刚体运动σ把后面一个标架变为前面一个标架．不妨把曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$ 在σ下的象仍用同一个记号来记，那么曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(s)$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$ 在对应点仍旧有相同的曲率和挠率，并且它们在 $s=0$ 处有相同的 Frenet 标架．我们要证明$\boldsymbol{r}_2(s)=\boldsymbol{r}_1(s)$，$\forall s$.为此，命

$$f(s)=(\boldsymbol{\alpha}_2(s)-\boldsymbol{\alpha}_1(s))^2+(\boldsymbol{\beta}_2(s)-\boldsymbol{\beta}_1(s))^2+(\boldsymbol{\gamma}_2(s)-\boldsymbol{\gamma}_1(s))^2, \tag{1}$$

由假设可知 $f(0)=0$.直接微分得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s}=&(\boldsymbol{\alpha}_2(s)-\boldsymbol{\alpha}_1(s))\cdot(\kappa_2\boldsymbol{\beta}_2(s)-\kappa_1\boldsymbol{\beta}_1(s))\\&+(\boldsymbol{\beta}_2(s)-\boldsymbol{\beta}_1(s))\cdot[(-\kappa_2\boldsymbol{\alpha}_2(s)+\kappa_1\boldsymbol{\alpha}_1(s))\\&+(\tau_2\boldsymbol{\gamma}_2(s)-\tau_1\boldsymbol{\gamma}_1(s))]+(\boldsymbol{\gamma}_2(s)-\boldsymbol{\gamma}_1(s))\\&\cdot(-\tau_2\boldsymbol{\beta}_2(s)+\tau_1\boldsymbol{\beta}_1(s))\equiv0,\end{aligned}$$

故

$$f(s)\equiv0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1(s)\equiv\boldsymbol{\alpha}_2(s), \tag{3}$$

再考虑函数 $g(s)=(\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s))^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}=2(\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s))\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2(s)-\boldsymbol{\alpha}_1(s))\equiv 0,$$

$$g(0)=0,$$

所以 $g(s)\equiv 0$，即 $\boldsymbol{r}_2(s)=\boldsymbol{r}_1(s)$，$\forall s$.得证.

注记 根据上述定理不难知道，两条曲线 $\boldsymbol{r}=\gamma_1(t)$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u)$ 是全等的充分必要条件是：存在三次以上的连续可微函数 $u=\lambda(t)$，$\lambda'(t)\neq 0$，使得这两条曲线的弧长、曲率、挠率之间有以下关系式：

$$s_2(\lambda(t))=s_1(t),\quad \kappa_2(\lambda(t))=\kappa_1(t),\quad \tau_2(\lambda(t))=\tau_1(t).$$

在§3中我们已经知道，通过 Frenet 标架场，E^3 中的一条正则曲线就变成正交标架空间中的一条曲线，而 Frenet 公式恰好是正交标架空间中的这条曲线所满足的微分方程组，该方程组中的系数函数恰好是曲率 κ 和挠率 τ.因此定理1实质上就是正交标架空间中的这个一阶线性常微分方程组的解在给定初值下的唯一性. 现在我们用该方程组的解的存在性来证明以给定的函数 $\kappa(s)$，$\tau(s)$ 为曲率、挠率的曲线的存在性.

定理 2 设 $\kappa=\kappa(s)$，$\tau=\tau(s)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的任意两个连续可微函数，并且 $\kappa(s)>0$，则在 E^3 中存在正则曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$a\leqslant s\leqslant b$，它以 s 为弧长参数，以 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 为它的曲率和挠率.

证明 命

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

把 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 看作写成向量形式的 12 个未知函数，并且考虑一阶线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{e}_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}s}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad 1\leqslant i\leqslant 3. \end{cases} \tag{5}$$

这可以看成是 E^3 上的仿射标架空间中的一个方程组. 根据常微分方程组的理论, 对于任意给定的初值 $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{e}_1^0$, $\boldsymbol{e}_2^0$, $\boldsymbol{e}_3^0$, 方程组 (5) 有唯一的一组解 $\boldsymbol{r}(s)$, $\boldsymbol{e}_i(s)$, $a\leqslant s\leqslant b$, 满足初条件:

$$\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{e}_i(s_0)=\boldsymbol{e}_i^0, \quad 1\leqslant i\leqslant 3, \tag{6}$$

其中 s_0 是区间$[a,b]$中任意固定的一点. 问题在于所得的解 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是否就是我们所要求的曲线. 如果 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 恰好是定理所要求的曲线, 则由 (5) 式可知, $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 正好是曲线的 Frenet 标架场, 因此我们必须要求初值满足条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_i^0\cdot\boldsymbol{e}_j^0=\delta_{ij}, \\ (\boldsymbol{e}_1^0,\boldsymbol{e}_2^0,\boldsymbol{e}_3^0)=1. \end{cases} \tag{7}$$

我们要证明, 在初值满足上述条件时, 方程组 (5) 在初条件(6)下的解给出的 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条正则曲线, 它以 s 为弧长参数, 并以 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 为它的曲率和挠率. 为此, 我们首先证明 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$是右手正交标架族. 命

$$g_{ij}(s)=\boldsymbol{e}_i(s)\cdot\boldsymbol{e}_j(s)-\delta_{ij}. \tag{8}$$

因此条件 (7) 说明

$$g_{ij}(s_0)=0. \tag{9}$$

将 (8) 式求导, 并且利用 $\boldsymbol{e}_i(s)$ 满足方程组 (5) 得到

$$\frac{\mathrm{d}g_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{e}_j(s)+\boldsymbol{e}_i(s)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j(s)}{\mathrm{d}s}$$

$$=\sum_{k=1}^{3}(a_{ik}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_j+a_{jk}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k),$$

因为

$$a_{ij}+a_{ji}=0,$$

故 $g_{ij}(s)$ 满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}s}=\sum_{k=1}^{3}(a_{ik}g_{kj}+a_{jk}g_{ik}).\tag{10}$$

这是线性齐次方程组，它在初条件（9）下的解是唯一的，只能有

$$g_{ij}(s)\equiv 0,$$

即

$$\boldsymbol{e}_i(s)\cdot\boldsymbol{e}_j(s)\equiv\delta_{ij}.\tag{11}$$

因此，行列式 $(\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s))$ 的值只能是 $+1$ 或 -1. 但是在 $s=s_0$ 时，其值为 $+1$，由连续性得到

$$(\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s))\equiv 1,\tag{12}$$

故 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$ 是右手单位正交标架族. 由（5）的第一式可知

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=|\boldsymbol{e}_1(s)|=1,$$

所以 s 是弧长参数，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是正则曲线，即 $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{e}_1(s)$. 再由(5)的第二式得知

$$\kappa(s)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(s)}{\mathrm{d}s}\right|,\qquad \boldsymbol{\beta}(s)=\boldsymbol{e}_2(s),$$

即 $\kappa(s)$ 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率. 利用 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$ 的右手系性质得到 $\boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{e}_3(s)$，于是利用(5)的最后一式可知

$$\tau(s)=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\beta}(s),$$

即 $\tau(s)$ 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的挠率. 证毕.

上面的定理说明，函数 $\kappa=\kappa(s)>0$，$\tau=\tau(s)$ 在 E^3 中不计位置唯一地确定了一条曲线，所以可以把它们看作该曲线的方程. 在方程中不出现 E^3 中的坐标系，因此通常称 $\kappa=\kappa(s)$，$\tau=\tau(s)$ 为曲线的**内在方程**，或**自然方程**. 当然，从曲线的自然方程得到参数方程的过程，正是求解方程组（5）的过程. 一般说来，这个求解过程是比较困难的. 然而定理 1 告诉我们，如果已经知道方程组(5)的一个特解，则其余的解无非是上述特解在 E^3

的刚体运动下的象．作为例子，我们知道圆螺旋线 $r=(a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a>0)$ 的曲率、挠率是常数

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \tau=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

所以曲率、挠率分别是常数 κ_0，τ_0 $(\kappa_0>0)$ 的曲线必定是圆螺旋线，其中一条是 $r=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$，其中

$$a=\frac{\kappa_0}{\kappa_0^2+\tau_0^2}, \quad b=\frac{\tau_0}{\kappa_0^2+\tau_0^2}.$$

习　题

1．如果一条曲线的切向量与一个固定的方向成定角，则称该曲线为定倾曲线，或一般螺线（这样的曲线可以看成是柱面上与直母线成定角的曲线）．证明：曲线（$\kappa>0$）是定倾曲线的充分必要条件是它的挠率与曲率之比是常数．

2．设 $\tau=c\cdot\kappa$，c 是常数．写出这条曲线的参数方程．

3．证明：曲线

$$r(t)=(t+\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}t-\sin t)$$

和

$$r_1(u)=\left(2\cos\frac{u}{2},\ 2\sin\frac{u}{2},\ -u\right)$$

是合同的．

4．证明：曲线 C_1：$r=(\mathrm{ch}t,\mathrm{sh}t,t)$ 与曲线 C_2：$r=\left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{2}},\frac{e^u}{\sqrt{2}},u+1\right)$在空间 E^3 的一个刚体运动下是合同的．试求使 C_1 与 C_2 合同的刚体运动．

§6　曲线在一点的标准展开

若 $y=f(x)$ 是解析函数，则 $f(x)$ 可以在任意一点 x_0 的

近旁展开成收敛的幂级数．若 $f(x)$ 是光滑的，则 $f(x)$ 可以展开成任意 n 次的一个多项式与一个余项之和（即 Taylor 展式），而该多项式的系数恰好是由 $f(x)$ 的各次导数在 x_0 的值决定的．该多项式是原函数 $f(x)$ 的近似．对于空间中的光滑曲线，同样可以将它展开成一条多项式曲线与一个余项之和．特别是，如果曲线的曲率和挠率不为零，则在任意一点都可以求得一条三次曲线，使得它与原曲线在该点有相同的曲率、挠率和 Frenet 标架．

设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条以弧长 s 为参数的正则曲线，它在 $s=0$ 处的 Taylor 展式为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(0)+s\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{s^2}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{s^3}{3!}\dddot{\boldsymbol{r}}(0)+\boldsymbol{o}(s^3),\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{o}(s^3)$ 是余项，满足条件

$$\lim_{s\to 0}\frac{|\boldsymbol{o}(s^3)|}{s^3}=0.\tag{2}$$

根据 Frenet 公式，我们有

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{\alpha}(0),\\&\ddot{\boldsymbol{r}}(0)=\kappa(0)\boldsymbol{\beta}(0),\\&\dddot{\boldsymbol{r}}(0)=-\kappa^2(0)\boldsymbol{\alpha}(0)+\dot{\kappa}(0)\boldsymbol{\beta}(0)+\kappa(0)\tau(0)\boldsymbol{\gamma}(0),\end{aligned}\tag{3}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s)=&\boldsymbol{r}(0)+\left(s-\frac{\kappa_0}{6}s^3\right)\boldsymbol{\alpha}(0)+\left(\frac{\kappa_0}{2}s^2+\frac{\dot{\kappa}_0}{6}s^3\right)\boldsymbol{\beta}(0)\\&+\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3\boldsymbol{\gamma}(0)+\boldsymbol{o}(s^3),\end{aligned}$$

其中 $\kappa_0=\kappa(0)$，$\dot{\kappa}_0=\dot{\kappa}(0)$，$\tau_0=\tau(0)$．若把曲线在 $s=0$ 处的 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}(0);\boldsymbol{\alpha}(0),\boldsymbol{\beta}(0),\boldsymbol{\gamma}(0)\}$ 取作空间 E^3 的笛卡儿直角坐标系，则曲线在 $s=0$ 附近的参数方程成为

$$
\begin{cases}
x = s - \dfrac{\kappa_0^2}{6} s^3 + o(s^3), \\[2ex]
y = \dfrac{\kappa_0}{2} s^2 + \dfrac{\dot{\kappa}_0}{6} s^3 + o(s^3), \\[2ex]
z = \dfrac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 + o(s^3).
\end{cases}
\tag{4}
$$

上式称为曲线 $r = r(s)$ 在 $s = 0$ 处的**标准展开**.

当 $\kappa_0 \tau_0 \neq 0$ 时，曲线的标准展开式中的坐标函数 $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ 作为 s 的无穷小量的主要部分是 $s, \dfrac{\kappa_0}{2} s^2$, $\dfrac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3$. 于是，我们可以考虑一条新的曲线

$$
r_1(s) = \left(s, \frac{\kappa_0}{2} s^2, \frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 \right),
\tag{5}
$$

这是一条三次曲线，而且一般说来，s 不是 $r_1(s)$ 的弧长参数. 但是在 $s = 0$ 处，

$$
\begin{aligned}
& r_1(0) = 0, \\
& r_1'(0) = (1, 0, 0), \\
& r_1''(0) = (0, \kappa_0, 0), \\
& r_1'''(0) = (0, 0, \kappa_0 \tau_0),
\end{aligned}
$$

因此不难看出曲线 $r = r_1(s)$ 在 $s = 0$ 处的曲率为 κ_0，挠率为 τ_0，Frenet 标架为 $\{r(0); \alpha(0), \beta(0), \gamma(0)\}$.

曲线 $r = r_1(s)$ 称为原曲线 $r = r(s)$ 在 $s = 0$ 处的**近似曲线**，它在各个坐标面上的投影是很容易画出来的. 例如：它在密切平面上的投影是

$$
y = \frac{\kappa_0}{2} x^2, \quad z = 0;
\tag{6}
$$

在从切平面上的投影是

$$
z = \frac{\kappa_0 \tau_0}{6} x^3, \quad y = 0;
\tag{7}
$$

在法平面上的投影是

$$\begin{cases} y=\dfrac{\kappa_0}{2}s^2, \\ z=\dfrac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3, \end{cases} \qquad x=0. \tag{8}$$

它们的图象见图 9.

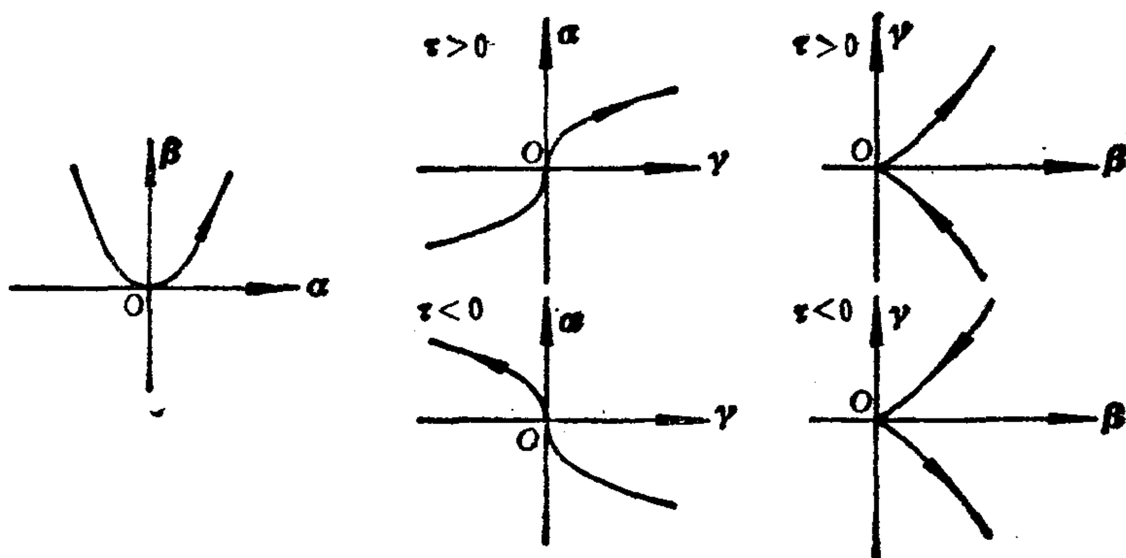


图 9

从图中可以发现，曲线在 $s=0$ 处是穿过在该点的密切平面的. 当 $\tau_0>0$ 时，曲线是从下到上穿过密切平面的；当 $\tau_0<0$ 时，曲线是从上到下穿过密切平面的（密切平面的定向由次法向量 $\gamma(0)$ 确定）.

两条相交曲线在交点附近的接近程度是用所谓的切触阶（或密切阶）来刻画的. 设曲线 C_1 和 C_2 相交于点 p_0，取 $p_1\in C_1$，$p_2\in C_2$，使得 $\widehat{p_0p_1}=\widehat{p_0p_2}=\Delta s$，若有正整数 n 使得

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|p_1p_2|}{\Delta s^n}=0, \\ &\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|p_1p_2|}{\Delta s^{n+1}}\neq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

则称曲线 C_1 和 C_2 在点 p_0 有 n 阶切触.

刻画曲线和曲面在交点附近的接近程度，要用所谓的曲线和曲面的切触阶的概念. 曲线和曲面的切触阶的定义与两条相交曲线的切触阶的定义是类似的，只是在用曲面Σ代替曲线 C_2 时，(9) 式中的 p_2 是曲面Σ上距离 p_1 最近的点，因而$|p_1p_2|$恰好是 C_1 上的点 p_1 到曲面Σ的距离. 如果Σ是以点 A 为中心、以 r 为半径的球面（因为Σ经过点 p_0，故$|p_0A|=r$），于是 p_2 恰好是线段 p_1A 与Σ的交点，所以$|p_1p_2|=|p_1A|-r$. 此外，$|p_1p_2|$作为 Δs 的无穷小量显然是与$|p_1A|^2-r^2$ 是同阶的，因而在 (9) 式中可以用$|p_1A|^2-r^2$ 代替$|p_1p_2|$.

定理 1 设曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(s)$ 在 $s=0$ 处相交，即 $\boldsymbol{r}_1(0)=\boldsymbol{r}_2(0)$，则它们在 $s=0$ 处有 n 阶切触的充分必要条件是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_1^{(i)}(0)=\boldsymbol{r}_2^{(i)}(0),\quad 1\leqslant i\leqslant n,\\&\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(0)\neq\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(0).\end{aligned}\tag{10}$$

证明 实际上，在条件 (10) 下，利用 Taylor 展式得到

$$\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s)=\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}(\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(0)-\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(0))+\boldsymbol{o}(s^{n+1}),$$

因此

$$\lim_{s\to 0}\frac{|\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s)|}{s^n}=0,$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{|\boldsymbol{r}_2(s)-\boldsymbol{r}_1(s)|}{s^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}|\boldsymbol{r}_2^{(n+1)}(0)-\boldsymbol{r}_1^{(n+1)}(0)|\neq 0,$$

反之亦然. 证毕.

由此可见，一条曲线与它在一点的 Taylor 展式的前$(n+1)$项之和在该点至少有 n 阶切触. 曲线与它在一点的切线至少有一阶切触，与它在一点的近似曲线至少有二阶切触.

作为定理 1 的推论，两条相交的曲线在交点处有二阶以上的切触的充分且必要条件是这两条曲线在该点相切，且有相同的密切平面和曲率. 实际上，由定理 1 可知，若曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$，$\boldsymbol{r}_2(s)$ 在 $s=0$ 处相交，则它们在 $s=0$ 处有二阶以上切触的条件是

$$\dot{r}_1(0)=\dot{r}_2(0),\quad \ddot{r}_1(0)=\ddot{r}_2(0).$$

后一条件意味着

$$\kappa_1(0)\boldsymbol{\beta}_1(0)=\kappa_2(0)\boldsymbol{\beta}_2(0),$$

即

$$\kappa_1(0)=\kappa_2(0),\quad \boldsymbol{\beta}_1(0)=\boldsymbol{\beta}_2(0).$$

设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在 $s=0$ 处的曲率 $\kappa_0=\kappa(0)>0$. 在该点的密切平面上作以 $\boldsymbol{r}(0)+\frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\beta}(0)$ 为中心、以$\frac{1}{\kappa_0}$为半径的圆周，则这个圆周与曲线在 $s=0$ 处相切，有相同的曲率和密切平面，因此它与原曲线在该点有二阶以上的切触. 这个圆周称为原曲线在 $s=0$ 处的**曲率圆**，其中心 $\boldsymbol{r}(0)+\frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\beta}(0)$ 称为**曲率中心**，其半径 $\rho=\frac{1}{\kappa_0}$称为在该点的**曲率半径**. 曲率圆的几何意义是它形象地告诉我们曲线在一点的弯曲程度.

最后我们要指出，曲线的 Frenet 标架的构造过程恰好是曲线方程逐次求导的过程. 实际上，Frenet 标架的基底向量 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$ 是 $\{\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t)\}$ 经过 Schmidt 正交化得到的. $\boldsymbol{r}'(t)$ 决定了曲线的切线，曲线的曲率就是切线的方向关于弧长的变化率. $\boldsymbol{r}'(t)$, $\boldsymbol{r}''(t)$ 决定了曲线的密切平面. 如果沿曲线的密切平面的方向不变，则它必是平面曲线. 如果该曲线不是平面曲线，则它的密切平面的方向关于弧长的变化率是曲线的挠率，它反映了曲线的扭曲程度. 很明显，曲线方程的更高次导数仍然能够表示成 Frenet 标架向量的线性组合，其系数是曲率 κ 和挠率 τ 及其各次导数.

习　题

1． 如果在两条曲线之间可以建立一个点对应，使得在对应点这两条曲线有公共的主法线，则称这两条曲线互为共轭曲线.

如果一条曲线有非平凡的（即与它自身不重合的）共轭曲线，则称它为 **Bertrand 曲线**．证明：在互为共轭的曲线 C_1, C_2 的对应点之间的距离为常数，并且在对应点处的切线成定角．

2．证明：曲率 κ 和挠率 τ 都不为零的曲线是 Bertrand 曲线的充分必要条件是：存在常数 λ，μ（其中 $\lambda \neq 0$）使得

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 0.$$

3．若在曲线 C_1 和 C_2 之间存在一个点对应，使得 C_1 在任意一点的切线恰好是 C_2 在对应点的法线，则称 C_2 是 C_1 的**渐伸线**，同时称 C_1 是 C_2 的**渐缩线**．设曲线 C_1 的方程是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(s)$，其中 s 是弧长参数，证明：C_1 的渐伸线 C_2 的方程是

$$\boldsymbol{r}_2(s) = \boldsymbol{r}_1(s) + (c - s)\boldsymbol{\alpha}_1(s),$$

其中 c 是常数，$\boldsymbol{\alpha}_1(s)$ 是 C_1 的单位切向量．

4．设曲线 C_1 的方程是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(s)$，试求 C_1 的渐缩线 C_2 的方程．（提示：设 C_2 的方程是 $\boldsymbol{r}_2(s) = \boldsymbol{r}_1(s) + \lambda(s)\boldsymbol{\beta}_1(s) + \mu(s)\boldsymbol{\gamma}_1(s)$，并且要求 $\boldsymbol{r}_2'(s) /\!/ (\lambda\boldsymbol{\beta}_1 + \mu\boldsymbol{\gamma}_1)$，以此确定 λ 和 μ．）

5．证明：若平面曲线的曲率中心轨迹是正则曲线，则它是原曲线的一条渐缩线．

6．经过曲率中心、并与密切平面垂直的直线称为**曲率轴**．证明：球心在点 $s=0$ 的曲率轴上、经过点 $\boldsymbol{r}(0)$ 的球面与曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 在 $s=0$ 处有二阶以上的切触（提示：只要证明

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\left\{\left|\boldsymbol{r}(s) - \left(\boldsymbol{r}(0) + \frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\beta}(0) + c\boldsymbol{\gamma}(0)\right)\right| - \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)^2 + c^2}\right\}$$

$= 0$）．

7．与曲线在一点有三阶以上切触的球面称为**密切球面**．试求曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 在点 s 处的密切球面的中心．

§7　平 面 曲 线

平面曲线可以看成挠率 $\tau \equiv 0$ 的空间曲线来进行研究，因此

前面的讨论仍旧适用于平面曲线．但是平面曲线有它自身的特点，因此本节强调指出平面曲线的特殊性质．

在平面 E^2 中的一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s)), \tag{1}$$

其中 s 是弧长参数．因此它的单位切向量是

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s)). \tag{2}$$

注意到 E^2 是有向的平面，故可将 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 沿正向旋转 $90°$ 得到唯一的一个与 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 正交的单位向量 $\boldsymbol{\beta}(s)$，显然

$$\boldsymbol{\beta}(s)=(-\dot{y}(s),\dot{x}(s)). \tag{3}$$

这样，沿平面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 建立了一个右手单位正交标架场 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s)\}$，它用来代替空间曲线的 Frenet 标架场．值得指出的是，标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$ 的建立只用到曲线方程的一次微商．

由于 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是单位向量场，故有 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\perp\boldsymbol{\alpha}(s)$，所以

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\kappa_r\boldsymbol{\beta}(s), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\kappa_r&=\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)=-\ddot{x}(s)\dot{y}(s)+\ddot{y}(s)\dot{x}(s),\\ &=\begin{vmatrix}\dot{x}(s) & \dot{y}(s)\\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s)\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

我们称 κ_r 为平面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的**相对曲率**．若用 κ 记曲线的曲率，则有 $\kappa_r=\pm\kappa$，其中“+”号表示 $\boldsymbol{\beta}$ 正好指向曲线弯曲的一侧，而“-”表示 $-\boldsymbol{\beta}$ 指向曲线弯曲的一侧（见图10）．

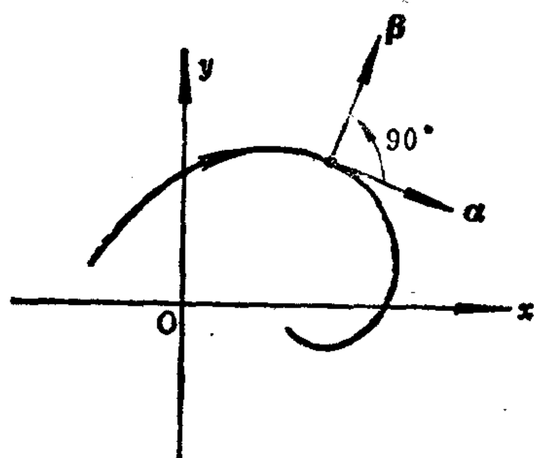


图 10

很明显，平面曲线的 Frenet 公式成为

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\alpha},\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}=\kappa_r\boldsymbol{\beta},\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=-\kappa_r\boldsymbol{\alpha}.\end{cases} \tag{6}$$

它的曲率中心是 $r(s)+\frac{1}{\kappa_r}\beta(s)$.

我们用 $\theta(s)$ 表示单位切向量 $\alpha(s)$ 与 x 轴正向所成的角，称为 $\alpha(s)$ 的**方向角**. 当然方向角是多值的，在 s 的一个充分小的区间内总可以取出 $\theta(s)$ 的一个连通分支. 这时

$$\alpha(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s)),$$

即

$$\dot{x}(s)=\cos\theta(s),\quad \dot{y}(s)=\sin\theta(s).$$

再求导得到

$$\ddot{x}(s)=-\sin\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s),\quad \ddot{y}(s)=\cos\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s),$$

因此

$$\kappa_r=\frac{d\theta(s)}{ds}. \tag{7}$$

上式清楚地说明了相对曲率 κ_r 的几何意义. 对于平面曲线来说，基本定理变成直截了当的表达式：

$$\begin{cases} \theta(s)=\theta(s_0)+\int_{s_0}^{s}\kappa_r(s)ds, \\ x(s)=x(s_0)+\int_{s_0}^{s}\cos\theta(s)ds, \\ y(s)=y(s_0)+\int_{s_0}^{s}\sin\theta(s)ds. \end{cases} \tag{8}$$

对于整条平面曲线 $r=r(s)$, $a\leqslant s\leqslant b$ 而言，我们也能取出方向角的连续分支 $\theta(s)$. 实际上，在每一点处，单位切向量 $\alpha(s)$ 的方向角之间差一个2π 的整数倍. 这样，我们可以将区间$[a,b]$划分得充分细：$a=s_0<s_1<\cdots<s_n=b$，使得在每一段 $[s_i,s_{i+1}]$上，方向角的连续分支 $\theta(s)$的变差不超过 π. 然后我们可以从$[s_0,s_1]$上的一个连续分支 $\theta(s)$ 出发，依次唯一地确定了各段$[s_i,s_{i+1}]$上的连续分支 $\theta(s)$，最终得到在整条曲线上的方向角连续分支$\theta(s)$. 由此可见，方向角的任意两个连续分支$\theta(s)$，$\tilde{\theta}(s)$ 之间只差2π的一个整倍数，即有整数 k，使得

$$\tilde{\theta}(s)-\theta(s)=2k\pi.$$

因此方向角的总变差与连续分支 $\theta(s)$ 的取法无关：

$$\tilde{\theta}(b)-\tilde{\theta}(a)=\theta(b)-\theta(a).$$

显然，由(7)式可知

$$\theta(b)-\theta(a)=\int_a^b \kappa_r(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

如果 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$a\leqslant s\leqslant b$ 是 E^2 中的一条光滑曲线，而且

$$\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b),\quad \dot{\boldsymbol{r}}(a)=\dot{\boldsymbol{r}}(b),\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(a)=\ddot{\boldsymbol{r}}(b),\quad \cdots$$

则称它为光滑闭曲线．如果曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$a\leqslant s\leqslant b$ 是若干段光滑曲线首尾相接而成的，且 $\boldsymbol{r}(b)=\boldsymbol{r}(a)$，则称它为分段光滑闭曲线．

若 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$a\leqslant s\leqslant b$ 是一条闭曲线，而且对于任意的 $a\leqslant t_1<t_2<b$，都有 $\boldsymbol{r}(t_1)\neq\boldsymbol{r}(t_2)$，则称该闭曲线是简单的．简单闭曲线就是不自交的闭曲线．

对于连续可微的闭曲线，它的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 绕曲线走一圈之后与它在起点的单位切向量是重合的，因此 $\theta(b)-\theta(a)$ 只是2π的整数倍，它与方向角连续分支 $\theta(s)$ 的选取无关．命

$$i(C)=\frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a)), \tag{10}$$

称为连续可微闭曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的**旋转指标**．

我们有下面的重要结果：

定理（旋转指标定理） 若 C 是平面上一条连续可微的简单闭曲线，则它的旋转指标 $i(C)=\pm1$．

这个定理的直观意义是明确的，但是它的证明不是很简单．它是曲线的整体微分几何性质．关于平面曲线和空间曲线有很丰富的整体性质，读者可看：陈省身的“欧氏空间中的曲线和曲面”，载于陈省身、陈维桓所著的《微分几何讲义》附录一．

若 C 是分段光滑的闭曲线，则曲线的方向角总变差是

$$\theta(b)-\theta(a)=\int_a^b \kappa_r(s)\mathrm{d}s+\sum_i \alpha_i, \tag{11}$$

其中 α_i 是曲线在各角点的外角，$-\pi<\alpha_i<\pi$，即

$$\alpha_i = \angle(\alpha(s_i - 0), \alpha(s_i + 0)), \tag{12}$$

这里 s_i 是曲线的角点，曲线在每一段 $s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}$ 上是光滑的. 在上述定义下，旋转指标定理对于分段连续可微的简单闭曲线仍然成立.

习　题

1. 求下列平面曲线的相对曲率 κ_r：

(1) 椭圆 $\boldsymbol{r} = (a\cos t, b\sin t)$，$0 \leqslant t < 2\pi$.

(2) 双曲线 $\boldsymbol{r} = (a\operatorname{ch} t, b\operatorname{sh} t)$.

(3) 抛物线 $\boldsymbol{r} = (t, t^2)$.

(4) 摆线 $\boldsymbol{r} = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.

(5) 悬链线 $\boldsymbol{r} = \left(t, a\cdot\operatorname{ch}\dfrac{t}{a}\right)$.

(6) 曳物线 $\boldsymbol{r} = (a\cos\varphi, a\ln(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) - a\sin\varphi)$，$0 \leqslant \varphi < \pi/2$.

2. 设在平面极坐标系下，曲线的方程是 $\rho = \rho(\theta)$，其中 θ 是极角，ρ 是极距. 求曲线的相对曲率的表达式.

3. 已知曲线的相对曲率为

$$\kappa_r(s) = \frac{1}{1 + s^2},$$

其中 s 是弧长参数，求这条平面曲线的参数方程.

4. 求第 1 题中各条曲线的曲率中心轨迹.

5. 求下列曲线的渐伸线：

(1) 圆周：$x^2 + y^2 = a^2$.

(2) 悬链线：$y = a\cdot\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

(3) 摆线：$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

第三章　曲面的第一基本形式

§1　曲面的定义

所谓参数曲面片是指从 E^2 的一个区域 D 到空间 E^3 中的一个连续映射．若在 E^2，E^3 中分别建立笛卡儿坐标系，用 (u,v) 记 E^2 中的点的坐标，用 (x,y,z) 记 E^3 中的点的坐标，则一个参数曲面片的方程可以表示为

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v)\in D, \tag{1}$$

或者写成向量方程：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)). \tag{2}$$

我们首先要求函数 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 都是三次以上连续可微的．变量 u,v 称为该曲面片的参数（见图11）．

在曲面S上取定一点 $P_0=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$．让 v 变化，而 $u=u_0$，则动点描出一条落在曲面 S 上的曲线，这条曲线称为过点 P_0 的

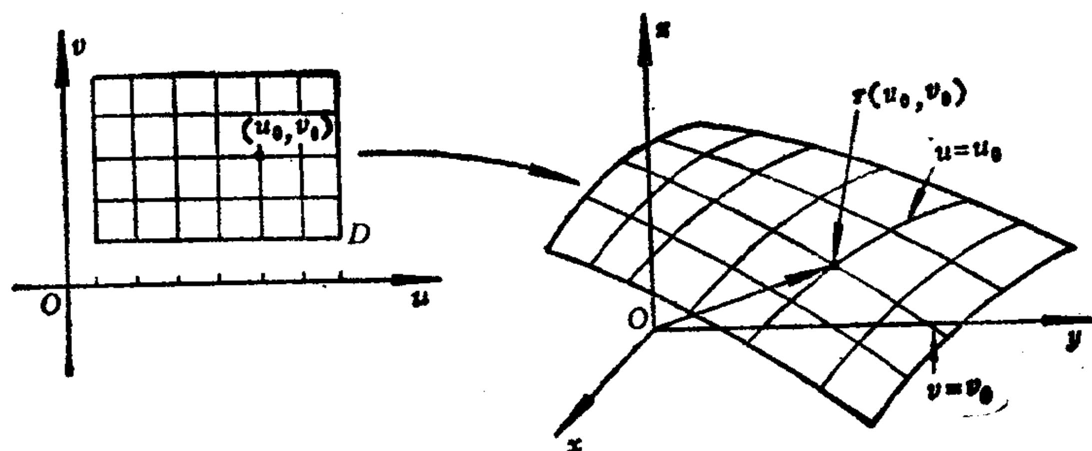


图　11

v-曲线，它的方程是

$$u=u_0, \tag{3}$$

或者

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v). \tag{4}$$

同理，我们有经过点 P_0 的 u-曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0)$，或记成 $v=v_0$. 这样，在参数曲面片上经过每一点有一条 u-曲线和一条 v-曲线，它们构成曲面上的**参数曲线网**. 从直观上看，曲面片 S 是将 E^2 中的区域 D 经过变形之后放到 E^3 中去得到的，而 E^2 中的坐标曲线网就变成曲面上的参数曲线网. 因此 (u,v) 可以作为曲面上的点的坐标，所以通常把 (u,v) 称为曲面上的**曲纹坐标**.

但是，要使 (u,v) 真正能够作为曲面片 S 上的点的坐标，必须要求在 S 和 D 的点之间是一一对应的. 方程 (1) 本身并不能保证这一点. 为此我们需要在方程 (1) 上加一些正则条件. 参数曲线在点 P_0 的两个切向量是

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)},$$

$$\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}. \tag{5}$$

如果 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$，$\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$是线性无关的，即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{(u_0,v_0)}\neq 0$，则称曲面片 S 在点 P_0 是正则的. 今后我们所研究的曲面片都是三次以上连续可微的、处处是正则点的曲面片，即所谓的**正则曲面片**.

设 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v)\in D$ 是一块正则曲面片. 对于任意一点 $(u_0,v_0)\in D$，因为

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|_{(u_0,v_0)}=\left.\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|_{(u_0,v_0)}$$
$$\neq 0,$$

不妨设

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0$$

故由反函数定理可知：存在点 (u_0,v_0) 在 D 内的邻域 U，使得函数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在 U 上有反函数

$$u=f(x,y),\qquad v=g(x,y).$$

这时，

$$z=z(u,v)=z(f(x,y),g(x,y)),\tag{6}$$

故邻域 U 和曲面片 $S|_U$ 之间存在一一的点对应.

上面的讨论还说明，正则曲面在任意一点的充分小的邻域由总可以表示成（6）的形式，即曲面在局部上总是可以看作一个二元函数的图象．用(6)式给出曲面的方式叫做 **Monge 形式.** 用 Monge 形式给出的曲面片总是正则的，实际上这时曲面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y)),\tag{7}$$

故

$$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)\neq 0.$$

当然，同一个曲面片可以有不同的参数表示．正则曲面片允许有如下的参数变换：

$$\begin{cases}u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\\ v=v(\tilde{u},\tilde{v}),\end{cases}\tag{8}$$

其中函数 $u(\tilde{u},\tilde{v})$，$v(\tilde{u},\tilde{v})$ 满足条件：

(i) $u(\tilde{u},\tilde{v})$，$v(\tilde{u},\tilde{v})$ 都是三次以上连续可微的函数；

(ii) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\neq 0.$

在新的参数下，曲面上参数曲线的切向量是

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}},$$

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}},$$

所以

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\times\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v. \tag{9}$$

由此可见，正则曲面片经过如上的参数变换仍然是正则曲面片.

我们规定，向量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 所指的一侧为曲面的正侧. 由此可见，参数 u,v 的先后次序决定了参数曲面片的定向. 当 u,v 的次序颠倒时，曲面片的定向也随着颠倒. (9) 式表明，参数变换 (8) 保持曲面片定向不变的充分必要条件是 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}>0$.

正则参数曲面片的概念在应用中十分方便，也十分广泛，但是它与我们通常所见到的整张曲面是有区别的. 例如我们知道球面的方程是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ (a 是常数). 可以证明，它不可能用一组参数方程把整个球面表示出来，换句话说，我们不能用一个参数曲线网把整个球面覆盖住. 因此，我们需要对正则曲面下一个确切的定义.

定义 设 S 是 E^3 中的一个子集. 如果对于任意一点 $p\in S$，必存在 p 的一个邻域 $V\subset E^3$，以及 E^2 中的一个区域 U，使得 U 和 $V\cap S$ 是同胚的，并且这个同胚映射 $\boldsymbol{r}:U\to V\cap S$，

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in U$$

给出了一个正则参数曲面片，则称 S 是 E^3 中的一个正则曲面，简称为曲面.

注记1 若有 E^3 中的两个邻域 V_1,V_2，使得 $V_1\cap V_2\cap S\neq\phi$，并且 $V_1\cap S$ 和 $V_2\cap S$ 分别有正则参数表示：

$$\boldsymbol{r}_i: U_i\to V_i\cap S,\qquad i=1,2,$$

则 $V_1\cap V_2\cap S$ 就有两个正则参数表示. 容易证明，这两个正则参数表示之间只差一个容许的参数变换. 因此，如果一个定义在正则参数曲面片上的量在容许参数变换下是不变的，则它就是正则

曲面上的量．我们所研究的量必须有这种不变性．

注记2 如果对每一点 $p\in S$，都可以选取它的一个邻域$U\cap S$的正则参数表示，使得当 $(V_1\cap S)\cap(V_2\cap S)\neq\phi$时，相应的容许参数变换都是保持定向的，则这种正则曲面称为是可定向的．

从直观上看，正则曲面是一些正则参数曲面片粘合起来的结果．因此，在我们的课程里着重研究正则参数曲面片以及它在容许参数变换下的不变量．

例1 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$.

圆柱面上的一个正则参数曲面片的方程是（见图12）

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cos u,a\sin u,\ bv),\tag{10}$$

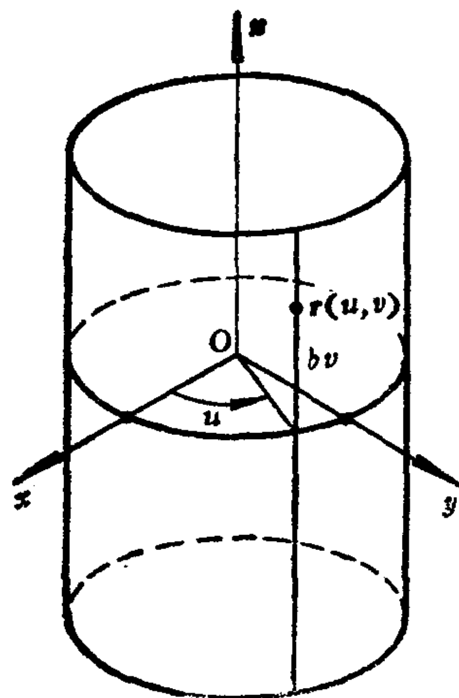


图 12

其中 $a>0,b$ 都是常数．若规定 $-\pi<u<\pi$，$-\infty<v<\infty$，则它所表示的是圆柱面上除去直线

$$x=-1,\quad y=0,\quad z=bv$$

后所得到的部分．若规定 $0<u<2\pi$，$-\infty<v<+\infty$，则它表示了去掉直线

$$x=1,\quad y=0,\quad z=bv$$

后所剩余的部分．这两部分把整个圆柱面盖住了．容易看到在这两部分重叠的区域内两个参数表示只差一个容许的参数变换．

例2 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（见图13）．

常用的球面的参数表示是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)\\&=(a\cos\varphi\cos\theta,a\cos\varphi\sin\theta,a\sin\varphi),\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $a>0$ 是常数．若规定 $-\pi<\theta<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则这

个参数曲面片恰好除去了球面上从北极到南极、经过点$(-a,0,0)$的半个大圆周. 想一想：若用这样的参数表示，则需要用几个参数曲面片才能将整个球面盖住？

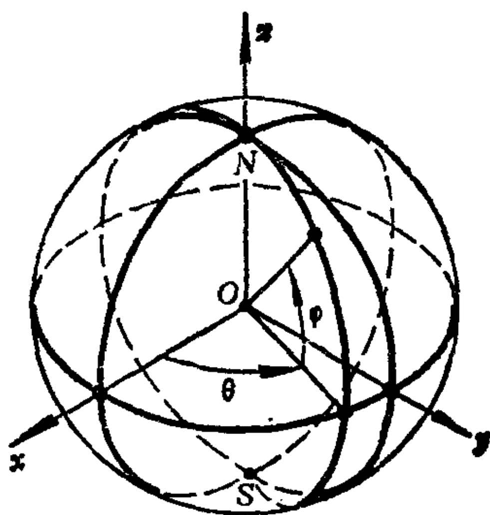


图 13

例3　旋转面.

圆柱面和球面都是旋转面的特例. 一般地，如果在坐标平面XOZ中有一条曲线 C（见图14）：

$$x=f(v),\quad z=g(v),\quad a\leqslant v\leqslant b,$$

假定 $f(v)>0$，则将它绕 z 轴旋转一周所得的曲面就是旋转面. 它的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),\tag{12}$$

其中 $u_0<u<u_1$，$u_1-u_0\leqslant 2\pi$. 按照习惯，我们把旋转面上的 u-曲线称为纬线（即平行圆），把 v-曲线称为经线.

例4　正螺旋面.

设直线 l 的初始位置与 x 轴重合，然后让直线 l 一边绕 z 轴

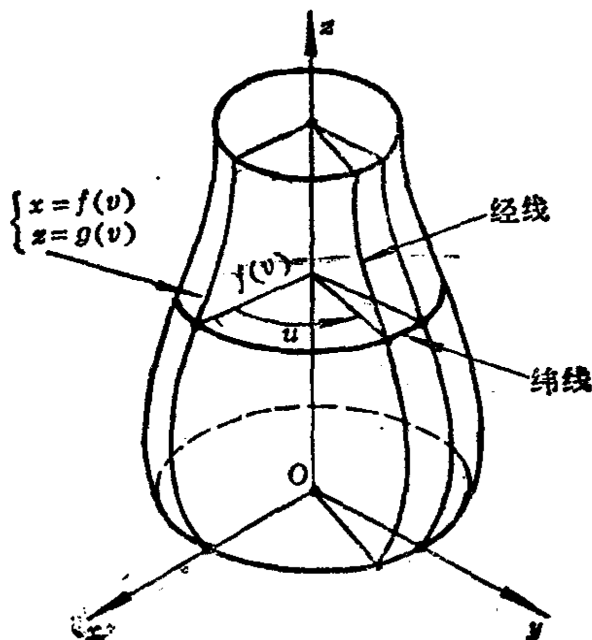


图 14

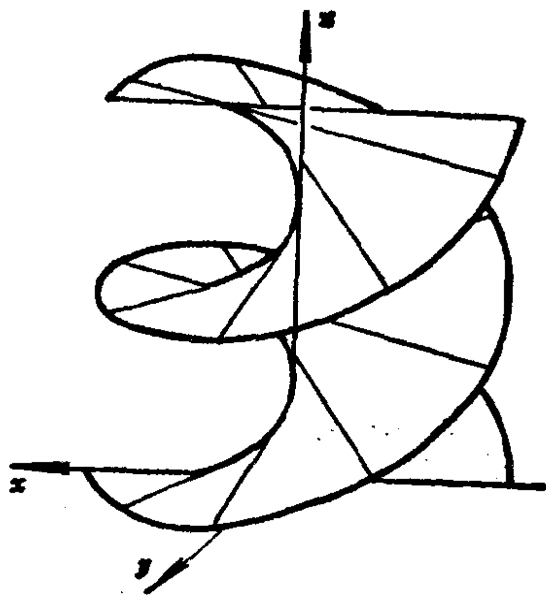


图 15

作匀速转动，一边沿 z 轴方向作匀速运动，则直线 l 在这两种运动的合成下所扫出的曲面就是正螺旋面（见图 15）. 显然，它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, av), \tag{13}$$

$$-\infty<u<+\infty,\quad -\infty<v<+\infty,$$

其中 a 是常数. 它的 u-曲线是与 z 轴垂直的直线，它的 v-曲线是圆螺旋线.

例5 直纹面.

所谓**直纹面**是指单参数直线族所构成的曲面. 正螺旋面就是一个直纹面，圆柱面也是直纹面. 确定一个直纹面要有两个要素：一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$，以及沿这条曲线定义的一个非零向量场 $\boldsymbol{l}(u)$. 于是经过每一点 $\boldsymbol{a}(u)$、沿方向 $\boldsymbol{l}(u)$ 可以作唯一的一条直线，它们所构成的曲面是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u). \tag{14}$$

曲线 $\boldsymbol{a}(u)$ 称为直纹面的准线，而 v-曲线（即族中的直线）称为直纹面的直母线. 因为 $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{l}'(u)$，$\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{l}(u)$，所以上述曲面片是正则的充分必要条件是

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{l}'(u))\times\boldsymbol{l}(u)\neq 0,$$

即 $\boldsymbol{a}'(u)\times\boldsymbol{l}(u)$ 与 $\boldsymbol{l}'(u)\times\boldsymbol{l}(u)$不能同时为零. 要指出的是，对于直纹面而言，准线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$的取法不是唯一的. 例如我们可以把曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}(u)$ 取成准线（其中 $\lambda(u)$ 是某个确定的函数）. 通过准线的这种变更，可以要求 $\boldsymbol{l}(u)$ 是定义在准线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$ 上的法向量场. 实际上，只要取

$$\lambda(u)=-\frac{1}{|\boldsymbol{l}(u)|}\int\left(\boldsymbol{a}'(u)\cdot\frac{\boldsymbol{l}(u)}{|\boldsymbol{l}(u)|}\right)\mathrm{d}u$$

就可以了.

当 $\boldsymbol{l}$ 为常向量时，所得的直纹面称为**柱面**.

当所有的直母线都经过一个定点时，所得的直纹面称为**锥面**.

当 $\boldsymbol{a}'(u)=\boldsymbol{l}(u)$ 时，所得的直纹面就是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)$ 的切

习　题

1. 写出椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面的参数方程.

2. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，命 $N=(0,0,1)$，$S=(0,0,-1)$. 对于赤道平面上的任意一点 $P=(u,v,0)$，可以作唯一的一条直线经过 N、P 两点，它与球面有唯一的一个交点 P'.

(1) 证明点 P' 的坐标是

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\qquad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\qquad z=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

它给出了球面上去掉北极 N 的剩余部分的正则参数表示.

(2) 求球面上去掉南极 S 的剩余部分的类似的参数表示.

(3) 求上面两种参数表示在公共部分所给出的参数变换.

3. 把单叶双曲面、双曲抛物面写成直纹面形式的参数方程.

4. 已知空间 E^3 中四个点 $P_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的坐标是 (x_i,y_i,z_i). 经过线段 P_1P_2 与 P_3P_4 上有相同分比的点所作的直线构成一个直纹面，写出这个直纹面的参数方程. 考察这个直纹面是正则曲面片的条件.

5. 求正螺旋面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,bv)$$

与圆柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的交线，并求它的曲率和挠率.

§2　切平面和法线

假定正则参数曲面片 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 在§1已经说过，$(u,v)$ 是曲面 S 上的点的曲纹坐标，因此曲面 S 上的曲线可以用参数方程

$$u=u(t), \quad v=v(t) \tag{1}$$

给出．把它看作空间 E^3 中的曲线，则它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),v(t)). \tag{2}$$

定义 曲面 S 上经过 P 点的任意一条曲线在该点的切向量称为曲面 S 在 P 点的**切向量**．

显然，根据定义，$\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 都是曲面 S 的切向量．假定 P 是曲线（1）上对应于 $t=0$ 的点，因此曲线（1）在 P 点的切向量是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}&=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}\\&=\left(\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0},\end{aligned} \tag{3}$$

这表明曲面 S 在 P 点的切向量 $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 是 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$ 的线性组合，其分量恰好是 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$．反过来，$\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 的任意一个线性组合必定是曲面的切向量．实际上，对于任意的实数 α,β，只要命

$$u(t)=u_0+\alpha t, \quad v(t)=v_0+\beta t, \tag{4}$$

其中 $P=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$，则曲线（4）在点 P 的切向量是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\alpha\boldsymbol{r}_u+\beta\boldsymbol{r}_v. \tag{5}$$

由于 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$，故 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$ 是线性无关向量，因此曲面在点 P 的切向量构成一个2维的向量空间（见图16），这个向量空间称为曲面 S 在 P 点的**切空间**，记作 T_PS．显然，$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 构成了空间 T_PS 的一个基底．在空间 E^3 中经过点 P、并且由曲面 S 在点 P 张成的平面称为曲面 S 在点 P 的**切平面**．很明显，这个切平面的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}. \tag{6}$$

在 E^3 中经过点 P、以 $\boldsymbol{n}$ 为方向向量的直线称为曲面 S 在点 P 的**法线**. 由(5), (6)两式可知, 曲面在点 P 的切空间、切平面、法线都是与曲面的参数表示无关的概念.

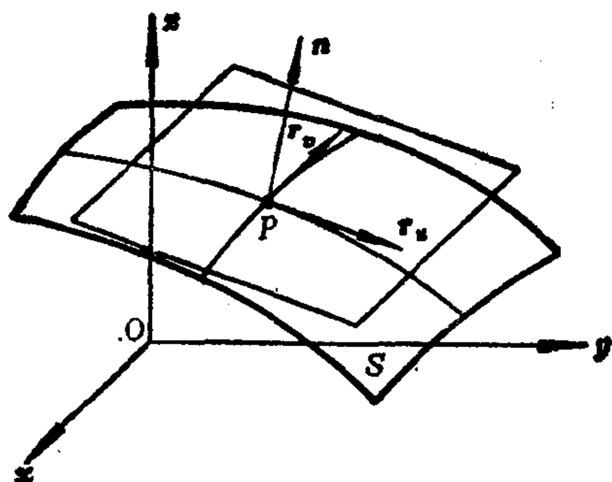


图 16

曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在点 (u,v) 的切平面的参数方程是

$$\boldsymbol{X}(\lambda,\mu)=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v, \tag{7}$$

其中 λ, μ 是切平面上动点的参数. 法线的参数方程是

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{r}(u,v)+t\boldsymbol{n}(u,v). \tag{8}$$

在曲面上每一点,由其参数方程定义了一个标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$,称为曲面上的**自然标架**. 这样, 通过正则参数曲面片上的自然标架场把参数曲面片变成了 E^3 上的依赖两个参数的标架族. 与曲线论的情形相仿, 曲面的局部理论归结为关于自然标架场的研究, 但是情况要复杂多了.

设在区域 $V\subset E^3$ 内给定了一个连续可微函数 $f(x,y,z)$,则当

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\neq 0$$

时, 函数 f 的等值面

$$f(x,y,z)=c \tag{9}$$

是 E^3 中的一个正则曲面. 实际上, 若设 $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P\neq 0$, 则在 P 点

附近存在函数 $z=g(x,y)$，使得对于任意的 x,y 有

$$f(x,y,g(x,y))\equiv c,$$

所以等价面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=(x,y,g(x,y)).$$

很明显，$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$是等值面（9）的法向量．实际上，若设 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$是等值面（9）上的一条曲线，则有

$$f(x(t),y(t),z(t))\equiv c.$$

对 t 求导得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0,$$

因此$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$与曲线是正交的．由于曲面上的上述曲线的任意性，可知$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$是曲面的法向量．

现在我们要给出微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的几何解释．先回顾一元函数 $y=f(x)$ 的微分．给自变量 x 一个增量 Δx，则函数值就相应地得到一个增量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

那么增量之比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是平面上经过函数图象上两点 $(x,f(x))$和 $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 的割线的斜率，故 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$是函数图象在点 $(x,f(x))$ 的切线斜率．根据定义，微分 $\mathrm{d}f(x)$ 是自变量增量 Δx 的线性函数，即 $\mathrm{d}f(x)=A(x)\Delta x$，并且它是函数增量 Δy 作为 Δx 的无穷小量的主要部分，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-A(x)\Delta x}{\Delta x}=0,$$

于是 $A(x)=f'(x)$，故函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分是

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x=f'(x)\mathrm{d}x, \tag{10}$$

其中将 Δx 记作 $\mathrm{d}x$（见图17）．值得指出的是在微分表达式中，x和 $\mathrm{d}x$ 是彼此独立的变量；在固定的点 x，$\mathrm{d}f(x)$恰好是函数$f(x)$的图象在$(x,f(x))$的切线上当自变量 x 获得增量 $\mathrm{d}x$ 时所产生的增量，它是$\mathrm{d}x$的线性函数．从几何上看，(10)式就是这条切线的方程：

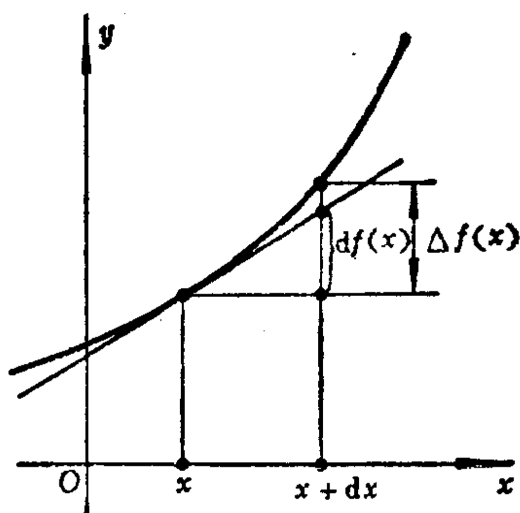


图 17

$$y=f(x)+f'(x)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

将以上的观察用于向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v(u,v)\mathrm{d}v, \tag{12}$$

则 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 都是独立于 u,v 的新自变量，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u,v)$ 不仅依赖于 u,v 而且是 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的线性函数．对于固定的点 (u,v)，(12) 式给出了曲面在点 $\boldsymbol{r}(u,v)$的任意的切向量，而 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 恰好是切向量$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u,v)$ 关于自然基底$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$的分量．(12) 式的几何图形就是曲面的切平面：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}(u,v)+\boldsymbol{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v(u,v)\mathrm{d}v, \tag{13}$$

这里 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 成为切平面上的参数．由于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 是切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 关于自然基底$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$的分量，故 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 可以看作是切空间 T_PS 上的线性函数，其中 $P=\boldsymbol{r}(u,v)$．显然 $\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}_u)=\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}_v)=1$，$\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}_v)=\mathrm{d}v(\boldsymbol{r}_u)=0$，故$\{\mathrm{d}u,\mathrm{d}v\}$构成 T_PS 的对偶空间 T_P^*S 中与$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$对偶的基底（参看第七章§1）．一般地，在已知曲面的参数方程的前提下，$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 的值便对应于一个如 (12) 式给出的切向量．此外，还常用比值 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 表示曲面上的一个切方向．值得指出的是，自然基底$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$一般不是单位正交的，所以在把$(\mathrm{d}u,$

dv）看作切向量在这个基底下的分量求内积时，不能把它看成在笛卡儿坐标系下的分量来进行运算，而应该顾及自然基底$\{r_u, r_v\}$的度量系数（参看§3）.

习　题

1. 证明：一个曲面是球面的充分必要条件是它的所有法线通过一个定点.

2. 证明：一个曲面是旋转面的充分必要条件是它的所有法线与一条固定的直线都相交.

3. 证明：一个曲面是锥面的充分必要条件是它的所有切平面都经过一个定点.

4. 假定在方程

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$$

中，a, b, c 是常数并且 $a>b>c$，λ 是参数．当 $\lambda\in(-\infty, c)$时，方程给出一族椭球面；当 $\lambda\in(c, b)$ 时，方程给出一族单叶双曲面；当 $\lambda\in(b, a)$ 时，则方程给出一族双叶双曲面．证明：经过空间中不在各坐标面上的任意一点有且恰有分别属于这三族曲面的三个二次曲面，并且它们沿交线是彼此正交的.

5. 设 S 是圆锥面：$r=(v\cos u, v\sin u, v)$，C 是 S 上一条曲线，方程为 $u=\sqrt{2}\,t, v=e^t$．（1）将 C 的切向量用 r_u, r_v 的线性组合表示出来．(2)证明：C 的切向量平分了 r_u 与 r_v 的夹角.

§3　曲面的第一基本形式

设有正则参数曲面片 S：$r=r(u,v)$．由§2的讨论知道，曲面 S 在每一点的切空间是由切向量 $r_u(u,v)$ 和 $r_v(u,v)$ 张成的二维向量空间，它是 R^3 的子空间；因此 S 的切向量作为 R^3 中的向量，可以求它们的长度及夹角．换言之，S 在任意一点的两个

切向量的内积就是它们作为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量的内积．前面已经说过，曲面 S 在任意一点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的切向量是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_u(u,v)\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v(u,v)\mathrm{d}v, \tag{1}$$

其中 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 是切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u,v)$ 在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下的分量．但是，一般说来，$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 不是单位正交基底．如果我们知道这个基底的度量系数，则表成（1）式的切向量的内积就能够用它们在基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下的分量 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 来表达了．命

$$\begin{aligned} E(u,v)&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\\ F(u,v)&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\\ G(u,v)&=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v, \end{aligned} \tag{2}$$

它们就是基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 的度量系数，称为曲面 S 的**第一类基本量**，通常把它们写成一个对称矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{3}$$

很明显这是一个正定矩阵．

曲面的第一类基本量在参数作容许的变换时是按一定的规律变换的．假定有参数变换

$$u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\qquad v=v(\tilde{u},\tilde{v}). \tag{4}$$

为简便起见新参数的曲面的方程仍记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\tilde{u},\tilde{v})\equiv\boldsymbol{r}(u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v})).$$

那么

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v=\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u}+\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}, \tag{5}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{\tilde{u}} \\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$(du, dv) = (d\tilde{u}, d\tilde{v}) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

记变换（4）的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

现在

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{pmatrix} (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v),$$

上式右边是矩阵的乘积，但矩阵元素之间的乘积是指 $\boldsymbol{R}^3$ 中的内积．因此

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_{\tilde{u}} \\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}, \boldsymbol{r}_{\tilde{v}})$$

$$= J \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot J^T, \tag{8}$$

即$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}$差一个合同变换．将（8）式展开则得

$$\widetilde{E} = E\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)^2,$$

$$\widetilde{F} = E\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)$$

$$+ G\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}, \tag{9}$$

$$\widetilde{G} = E\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)^2.$$

命

$$\text{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$$
$$=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}, \tag{10}$$

则由（7），(8) 两式可知，二次微分式 I 在容许参数变换(4) 下是不变的．我们称 I 为曲面的**第一基本形式**．

由（10）式可知，I 的几何意义是

$$\text{I}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{11}$$

即 I 是切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的长度平方．此外，若命

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v,$$

则切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\delta\boldsymbol{r}$ 的内积是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}&=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}\\ &=E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v.\end{aligned} \tag{12}$$

因此

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|&=\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2},\\ \cos\angle(\mathrm{d}\boldsymbol{r},\delta\boldsymbol{r})&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|}.\end{aligned} \tag{13}$$

特别是，向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 彼此正交的充分必要条件是

$$E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0. \tag{14}$$

定理1 在曲面片 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上参数曲线网是正交曲线网的充分必要条件是 $F\equiv 0$.

证明 由（13）式可知

$$\cos\angle(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \tag{15}$$

故 $\boldsymbol{r}_u\perp\boldsymbol{r}_v$ 当且仅当 $F\equiv 0$.

若在曲面上有一条曲线，它的方程是

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

则由（13）可知，它的弧长是

$$L=\int_a^b\left[E(u(t),v(t))\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F(u(t),v(t))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G(u(t),v(t))\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t \tag{16}$$

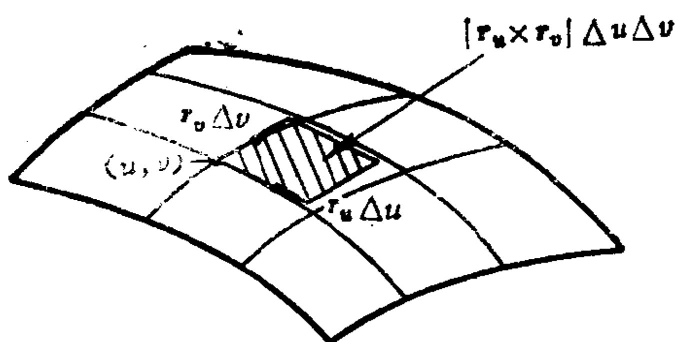


图 18

最后我们来讨论曲面上一个区域的面积的计算．设 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v)\in D\subset E^2$．考虑曲面上由参数曲线 $u=u_0$，$u=u_0+\Delta u$，$v=v_0$，$v=v_0+\Delta v$ 所围成的一小块，它的面积与切平面上由 $\Delta u\cdot\boldsymbol{r}_u$，$\Delta v\cdot\boldsymbol{r}_v$ 所张成的平行四边形的面积（见图18）在略去更高阶无穷小之后是相同的，而后者的面积是

$$|(\Delta u\cdot\boldsymbol{r}_u)\times(\Delta v\cdot\boldsymbol{r}_v)|=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\Delta u\Delta v=\sqrt{EG-F^2}\;\Delta u\Delta v.$$

命

$$\mathrm{d}A=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{17}$$

称为曲面 S 的**面积元素**．那么 S 的面积是

$$A=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{18}$$

根据重积分的变量替换法则以及第一类基本量的变换规律不难知道，A 与曲面上参数的容许变换是无关的．

例 求曲面上参数曲线的二等分角轨线的微分方程．

解 设曲面的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，第一基本形式是

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2.$$

在基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下，u-曲线的方向向量是 $(1,0)$，而v-曲线的

方向向量是（0,1）．假定参数曲线的二等分角轨线的方向向量是（$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$），则它与 u-曲线的夹角余弦是

$$\frac{E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v}{\sqrt{E}\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}},$$

它与 v-曲线的夹角余弦是

$$\frac{F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v}{\sqrt{G}\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}}.$$

所以，（$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$）应满足下列方程：

$$\frac{1}{\sqrt{E}}(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)=\pm\frac{1}{\sqrt{G}}(F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v).$$

由于 $EG-F^2>0$，化简之后得到

$$\sqrt{E}\,\mathrm{d}u\pm\sqrt{G}\,\mathrm{d}v=0. \tag{18}$$

注记 上述方程有直观上的解释．u-曲线的单位切向量是 $\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$，$v$-曲线的单位切向量是 $\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$，所以它们的角平分线的方向向量是 $\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}\pm\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$，即$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\left(\frac{1}{\sqrt{E}},\pm\frac{1}{\sqrt{G}}\right)$，于是满足方程 $\frac{1}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u\pm\frac{1}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v=0$，此即（18）式．

习　题

1．求下列曲面的第一基本形式：

（1）$\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,\varphi(v))$.

（2）$\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,\varphi(u)+av)$，其中 a 是常数．

2．设曲面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\left(\frac{2au}{u^2+v^2+a^2},\frac{2av}{u^2+v^2+a^2},\frac{u^2+v^2-a^2}{u^2+v^2+a^2}\right),$$

求它的第一基本形式．

3．设在曲面上一点，由二次方程

$$P\mathrm{d}u^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R\mathrm{d}v^2=0$$

确定了两个切方向．证明：这两个切方向彼此正交的充分必要条件是

$$ER-2FQ+GP=0.$$

*4．求球面上与经线交成定角的轨线方程．

*5．已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$．求：

（1）曲线 $C_1: u+v=0$ 与 $C_2: u-v=0$ 的交角．

（2）曲线 $C_1: u=\frac{a}{2}v^2$，$C_2: u=-\frac{a}{2}v^2$，$C_3: v=1$ 所构成的曲边三角形的边长和各个内角．

（3）曲线 $u=av$，$u=-av$ 和 $v=1$ 所围成的曲边三角形的面积．

§4 曲面上正交参数曲线网的存在性

在解析几何学中我们已经知道，引进坐标系的目的是为了把几何问题代数化，从而能够利用代数或分析的手段来研究几何问题．因为选择适当的坐标系对于简化问题是至关重要的，于是在解析几何学中化了很大的篇幅来讨论二次曲线和曲面的方程的标准型的问题．对于曲面而言，所谓适当的坐标系首先应该是正交参数系，这时 $F\equiv 0$，于是曲面的第一基本形式化为

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2.$$

问题在于：在曲面上是否存在正交参数曲线网？正交参数曲线网的确定有多大程度的随意性？下面的讨论以更一般的形式回答了上面的问题，它依赖于如下的引理：

引理 设 $f(u,v)$，$g(u,v)$ 是定义在区域 $D\subset E^2$ 上的两个不同时为零的连续可微函数，则对于任意一点 $(u_0,v_0)\in D$，必有它的一个邻域 $U\subset D$，以及定义在 U 上的非零连续可微函数 $\lambda(u,v)$，使得 $\lambda(u,v)$ 是一次微分形式

$$\omega\equiv f(u,v)\mathrm{d}u+g(u,v)\mathrm{d}v$$

的积分因子，即 $\lambda(u,v)\cdot\omega$ 必是 U 上某个函数 $F(u,v)$ 的全微分.

这个引理的证明见附录 §1. 引理的结论只对二变量的微分形式才成立，因此本节的结论只对曲面的情形才成立.

我们有下面的一般性命题：

定理1 假定在曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上有两个处处线性无关的连续可微的切向量场 $\boldsymbol{a}(u,v)$, $\boldsymbol{b}(u,v)$, 则对每一点 $P\in S$, 必有一个邻域 $U\subset S$, 使得在 U 上存在新参数系 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 满足条件：$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}/\!/\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}/\!/\boldsymbol{b}$.

证明 假定在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下，切向量场 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以分别表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_1(u,v)\boldsymbol{r}_u+a_2(u,v)\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{b}&=b_1(u,v)\boldsymbol{r}_u+b_2(u,v)\boldsymbol{r}_v,\end{aligned}\tag{1}$$

并且

$$A\equiv\begin{vmatrix}a_1(u,v) & a_2(u,v)\\ b_1(u,v) & b_2(u,v)\end{vmatrix}\neq 0\,.\tag{2}$$

我们先对问题作一些分析. 若有容许的参数变换

$$u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\qquad v=v(\tilde{u},\tilde{v})\tag{3}$$

使得 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}/\!/\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}/\!/\boldsymbol{b}$, 则必有函数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}=\lambda\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\mu\boldsymbol{b}.\tag{4}$$

由 §3 的（6）式可知，上述方程等价于

$$J\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{u}}\\ \dfrac{\partial u}{\partial\tilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{v}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2\\ \mu b_1 & \mu b_2\end{pmatrix}.\tag{5}$$

注意到 J 的逆矩阵是 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda\mu A}\begin{pmatrix} \mu b_2 & -\lambda a_2 \\ -\mu b_1 & \lambda a_1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $A=a_1b_2-a_2b_1$ 如（2）式所定义．由此可见

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{u} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{1}{\lambda A}(b_2\mathrm{d}u - b_1\mathrm{d}v), \\ \mathrm{d}\tilde{v} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{1}{\mu A}(-a_2\mathrm{d}u + a_1\mathrm{d}v). \end{aligned} \tag{7}$$

这表明，如果满足条件（4）的参数变换（3）是存在的，则必有函数 λ，μ，使 $\frac{1}{\lambda A}(b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v)$，$\frac{1}{\mu A}(-a_2\mathrm{d}u+a_1\mathrm{d}v)$ 是全微分．

现在考虑一次微分式

$$\begin{aligned} \alpha &= b_2\mathrm{d}u - b_1\mathrm{d}v, \\ \beta &= -a_2\mathrm{d}u + a_1\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{8}$$

由引理可知，在任意一点的一个邻域内存在非零函数 ξ，η，使得在该邻域内存在函数 $\tilde{u}(u,v)$，$\tilde{v}(u,v)$ 满足条件

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{u} &= \xi(b_2\mathrm{d}u - b_1\mathrm{d}v), \\ \mathrm{d}\tilde{v} &= \eta(-a_2\mathrm{d}u + a_1\mathrm{d}v), \end{aligned} \tag{9}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi b_2 & -\eta a_2 \\ -\xi b_1 & \eta a_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

且它的行列式为 $\xi\eta(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$．这说明 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是曲面在该邻域内的新参数．根据前面的分析可知 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}/\!/\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}/\!/\boldsymbol{b}$，即 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是所求的新参数系．

注记 定理的意思是在局部上存在参数系，使得参数曲线分

别和预先给定的处处线性无关的切向量场相切．但是，一般做不到 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\boldsymbol{b}$.

在曲面上彼此正交的非零切向量场总是存在的，最典型的办法是将自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 正交化：取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_u$，命

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_v+\lambda\boldsymbol{a}$$

使得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 于是待定的函数 λ 满足方程

$$\lambda E+F=0,$$

$$\lambda=-\frac{F}{E},$$

即

$$\boldsymbol{b}=-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v.$$

很明显，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$，因此有

推论 在曲面 S：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上任意一点 P 都有一个邻域 U，使得在该邻域内存在参数系 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 满足条件 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\cdot\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=0$，即 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是正交参数系.

注记 命 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\dfrac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_v\right)$，则 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是曲面上的单位正交切标架场，称为 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 的 **Schmidt 正交化.**

§5 保长对应和保角对应

假定有两个曲面

$$S_1:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u_1,v_1),\qquad (u_1,v_1)\in D_1,$$

$$S_2:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(u_2,v_2),\qquad (u_2,v_2)\in D_2.$$

因为 (u_i,v_i) 是曲面 S_i 上的点的曲纹坐标，所以从曲面 S_1 到 S_2 的映射表现为从定义域 D_1 到 D_2 的一个映射．换言之，如

果我们有映射 σ: $D_1 \to D_2$，使得

$$\begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1), \\ v_2 = g(u_1, v_1), \end{cases} \tag{1}$$

则我们便有从曲面 S_1 到 S_2 的映射（仍记作 σ），它把曲面 S_1 上的点 $r_1(u_1, v_1)$ 映为曲面 S_2 上的点 $r_2(f(u_1, v_1), g(u_1, v_1))$. 若函数 (1) 是连续可微的，则称映射 σ: $S_1 \to S_2$ 是连续可微的. 映射 σ 的连续可微性与 S_1, S_2 上的容许参数变换是无关的.

以下总是假定映射 σ: $S_1 \to S_2$ 有充分的连续可微性. 首先我们指出，在每一点 $P \in S_1$，映射 σ 诱导出从切空间 $T_P S_1$ 到切空间 $T_{\sigma(P)} S_2$ 的一个线性映射 σ_*: $T_P S_1 \to T_{\sigma(P)} S_2$，这个映射 σ_* 称为由映射 σ 诱导的**切映射**. 实际上，若在 S_1 上有一条曲线

$$C_1:\ u_1 = u_1(t),\ \ v_1 = v_1(t),$$

则它在映射 σ 下映为 S_2 上的一条曲线

$$C_2:\ u_2 = u_2(t) \equiv f(u_1(t), v_1(t)),\ \ v_2 = v_2(t) \equiv g(u_1(t), v_1(t)).$$

因此 C_2 的切向量是

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_2(u_2(t), v_2(t)) \\ &= (r_2)_{u_2} \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + (r_2)_{v_2} \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \left[(r_2)_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + (r_2)_{v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \right] \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \\ &\quad + \left[(r_2)_{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_1} + (r_2)_{v_2} \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \right] \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

假定 $P = r_1(u_1(t_0), v_1(t_0))$，则命

$$\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} r_1(u_1(t), v_1(t)) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} r_2(u_2(t), v_2(t)).$$

由上式可见

$$\sigma_*\begin{pmatrix}(\boldsymbol{r}_1)_{u_1}\\(\boldsymbol{r}_1)_{v_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{r}_2)_{u_2}\\(\boldsymbol{r}_2)_{v_2}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

并且

$$\sigma_*(\alpha(\boldsymbol{r}_1)_{u_1}+\beta(\boldsymbol{r}_1)_{v_1})$$

$$=\left(\alpha\frac{\partial u_2}{\partial u_1}+\beta\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)(\boldsymbol{r}_2)_{u_2}+\left(\alpha\frac{\partial v_2}{\partial u_1}+\beta\frac{\partial v_2}{\partial v_1}\right)(\boldsymbol{r}_2)_{v_2}. \tag{3}$$

所以 σ_* 是一个线性变换，而且它在 S_1，S_2 的自然基底下的矩阵正好是映射（1）的 Jacobi 矩阵$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix}$.略去基底向量，

（3）式可以简记为

$$\sigma_*(\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ \beta)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

由此可知，σ_*: $T_PS_1\to T_{\sigma(P)}S_2$ 是同构的充分必要条件是映射(1)的 Jacobi 行列式$\left.\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right|_P\neq 0$.

定理1 设 σ: $S_1\to S_2$ 是从曲面 S_1 到 S_2 的三次以上连续可微映射．如果在点 $P\in S_1$，切映射 σ_* 是从 T_PS_1 到 $T_{\sigma(P)}S_2$ 的线性同构，则在点 P 和 $\sigma(P)$ 分别有邻域 $U_1\subset S_1$ 和邻域 $U_2\subset S_2$，以及参数系 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2)，使得映射 $\sigma|_{U_1}$ 是由

$$u_2=u_1,\qquad v_2=v_1 \tag{5}$$

给出的，即 $\sigma|_{U_1}$ 是从曲面片 U_1 到 U_2 的、有相同参数值的点之间的对应．使映射 σ 能表成（5）式的参数系称为曲面片 S_1 和 S_2 上关于映射 σ 的**适用参数系**.

证明 实际上，由于$\left.\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right|_P\neq 0$，所以 (u_1,v_1) 可以作

为曲面 S_2 在点 $\sigma(P)$ 附近的参数系．这样，曲面 S_1 和 S_2 之间的映射就成为参数区域之间的恒同映射．证毕．

设在曲面 S_2 上有一个二次微分式

$$\varphi=A(u_2,v_2)(\mathrm{d}u_2)^2+2B(u_2,v_2)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2+C(u_2,v_2)(\mathrm{d}v_2)^2, \tag{6}$$

则通过映射 σ：$S_1\to S_2$ 便诱导出曲面 S_1 上的一个二次微分式，记作 $\sigma^*\varphi$，它就是将 φ 中的 u_2，v_2 用函数（1）代入的结果，即

$$\sigma^*\varphi=\widetilde{A}(u_1,v_1)(\mathrm{d}u_1)^2+2\widetilde{B}(u_1,v_1)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1+\widetilde{C}(u_1,v_1)(\mathrm{d}v_1)^2, \tag{7}$$

其中

$$\begin{pmatrix}\widetilde{A}(u_1,v_1) & \widetilde{B}(u_1,v_1)\\ \widetilde{B}(u_1,v_1) & \widetilde{C}(u_1,v_1)\end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix}A(u_2,v_2) & B(u_2,v_2)\\ B(u_2,v_2) & C(u_2,v_2)\end{pmatrix}\cdot J', \tag{8}$$

这里

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix},$$

且(8)式右边的 u_2,v_2 分别用 $f(u_1,v_1)$，$g(u_1,v_1)$ 代替．

定义1 设 σ 是从 E^3 中的曲面片 S_1 到 S_2 的连续可微映射，如果对于每一点 $P\in S_1$，切映射 σ_* 是从切空间 T_PS_1 到 $T_{\sigma(P)}S_2$ 的保持内积的线性映射，则称 σ 是从 S_1 到 S_2 的**保长对应**．

注记1 由于 σ_*：$T_PS_1\to T_{\sigma(P)}S_2$ 保持内积，所以 $|\sigma_*(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)|=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1|$．反过来，如果 σ_* 保持任意的切向量的长度不变，则 σ_* 必保持切向量的内积不变．实际上，这是因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}[|\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}|^2-|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2-|\delta\boldsymbol{r}|^2].$$

注记2 注意到 $\sigma_*(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)\cdot\sigma_*(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)=\sigma^*(\mathrm{I}_2)$，这里 I_2 表示曲面 S_2 上的第一基本形式；所以 σ：$S_1\to S_2$ 是保长对应的充

分必要条件是 $\sigma^*(\mathrm{I}_2)=\mathrm{I}_1$，其中 I_1，I_2 分别是曲面 S_1，S_2 的第一基本形式．换言之，σ 是保长对应的充分必要条件是

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(9) 式实际上给出了寻求曲面 S_1,S_2 之间的保长对应的微分方程．这是非线性一阶偏微分方程组，直接求解或者判断解的存在性是困难的．以后我们能够得到保长对应的一些不变量（例如 Gauss 曲率，见第五章 §5），这对我们判断两个曲面是否能建立保长对应有很大的帮助．

推论 曲面 S_1 和 S_2 之间存在保长对应的充分必要条件是能在 S_1、S_2 上取适当的相同的参数系 (u,v)，使得在这个参数系下，曲面 S_1 和 S_2 有相同的第一类基本量．

证明 如果 σ：$S_1\to S_2$ 是保长对应，故 σ_*：$T_pS_1\to T_{\sigma(p)}S_2$ 必定是非退化的．由定理 1 可知，在 S_1，S_2 上存在适用参数系 (u,v)，使得 σ 是 S_1，S_2 上有相同参数值的点之间的对应．根据 (9) 式，显然有 $E_1=E_2$，$F_1=F_2$，$G_1=G_2$．反过来，这是明显的．

例1 证明：螺旋面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,u+v)$ 与旋转双曲面 $\boldsymbol{r}=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\sqrt{\rho^2-1})(\rho\geqslant1,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 之间可以建立保长对应．

解 直接计算得到螺旋面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=2du^2+2dudv+(u^2+1)dv^2,$$

旋转双曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}^*=\frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}d\rho^2+\rho^2d\theta^2.$$

先在螺旋面上作适当的参数变换，使得参数系是正交的．实际上

$$\mathrm{I}=\left(2-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u^2+(u^2+1)\left(\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}+\mathrm{d}v\right)^2,$$

命

$$\tilde{u}=u, \quad \tilde{v}=\operatorname{arctg}u+v,$$

则

$$\mathrm{I}=\frac{2\tilde{u}^2+1}{\tilde{u}^2+1}\mathrm{d}\tilde{u}^2+(\tilde{u}^2+1)\mathrm{d}\tilde{v}^2.$$

与 I^* 相对照，命

$$\rho=\sqrt{\tilde{u}^2+1}, \quad \theta=\tilde{v},$$

则直接计算得到 $\mathrm{I}=\mathrm{I}^*$. 因此 S_1 和 S_2 之间有保长对应，这个对应是：

$$\rho=\sqrt{u^2+1}, \quad \theta=\operatorname{arctg}u+v.$$

注记 本例的解法具有拼凑的特点，这比直接求解方程(9)要简单. 在熟悉了 Gauss 曲率的计算方法以及它的内蕴不变性之后可以使拼凑的目标更加明朗一些.

定义2 设 σ 是从 E^3 中的曲面片 S_1 到 S_2 的连续可微映射. 如果存在定义在 S_1 上的正的连续函数 ρ，使得对于任意的 $P\in S_1$ 及 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in T_PS_1$ 都有

$$\sigma_*(\boldsymbol{a})\cdot\sigma_*(\boldsymbol{b})=\rho^2(P)\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \tag{10}$$

则称 σ 是**保角对应**

从定义可知，如果保角对应 σ 中的函数 $\rho\equiv1$，则 σ 就是保长对应. 另外，条件(10)等价于

$$\sigma^*(\mathrm{I}_2)=\rho^2\cdot\mathrm{I}_1. \tag{11}$$

所以，σ 是保角对应的充分必要条件是

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2 & F_2\\ F_2 & G_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\end{pmatrix}=\rho^2\cdot\begin{pmatrix}E_1 & F_1\\ F_1 & G_1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

特别是，如果在 S_1, S_2 上取适用参数系，使得 σ 是 S_1, S_2 上有

相同参数值的点之间的对应，则条件（12）就成为

$$E_2=\rho^2E_1,\qquad F_2=\rho^2F_1,\qquad G_2=\rho^2G_1. \tag{13}$$

定理2 设 σ 是从 E^3 中的曲面片 S_1 到 S_2 的连续可微映射，则 σ 是保角对应的充分必要条件是对任意一点 $P\in S_1$，及任意两个切向量 $a,b\in T_PS_1$，都有

$$\angle(\sigma_*(a),\sigma_*(b))=\angle(a,b). \tag{14}$$

证明 必要性是定义2的直接推论. 现证充分性. 设映射 σ: $S_1\to S_2$ 有性质（14），则 $\sigma_*(a)\neq0$, $\forall a\in T_PS_1$. 利用定理1可知在 S_1,S_2 上能取适用参数系 (u,v)，使 σ 是 S_1,S_2 上有相同参数值的点之间的对应，于是 $\sigma_*((r_1)_u)=(r_2)_u$, $\sigma_*((r_1)_v)=(r_2)_v$, $\sigma_*((r_1)_u+(r_1)_v)=(r_2)_u+(r_2)_v$, 其中$r_1(u,v)$, $r_2(u,v)$ 分别是曲面 S_1,S_2 的参数方程. 由条件（14）可知

$$\angle((r_1)_u,(r_1)_v)=\angle((r_2)_u,(r_2)_v),$$

$$\angle((r_1)_u+(r_1)_v,(r_1)_u)=\angle((r_2)_u+(r_2)_v,(r_2)_u),$$

$$\angle((r_1)_u+(r_1)_v,(r_1)_v)=\angle((r_2)_u+(r_2)_v,(r_2)_v).$$

因此，我们有

$$\frac{F_1}{\sqrt{E_1G_1}}=\frac{F_2}{\sqrt{E_2G_2}},$$

$$\frac{E_1+F_1}{\sqrt{E_1+2F_1+G_1}\ \sqrt{E_1}}=\frac{E_2+F_2}{\sqrt{E_2+2F_2+G_2}\ \sqrt{E_2}},$$

$$\frac{F_1+G_1}{\sqrt{E_1+2F_1+G_1}\ \sqrt{G_1}}=\frac{F_2+G_2}{\sqrt{E_2+2F_2+G_2}\ \sqrt{G_2}}.$$

由后两式得到

$$\frac{\sqrt{E_1}+\dfrac{F_1}{\sqrt{E_1}}}{\sqrt{G_1}+\dfrac{F_1}{\sqrt{G_1}}}=\frac{\sqrt{E_2}+\dfrac{F_2}{\sqrt{E_2}}}{\sqrt{G_2}+\dfrac{F_2}{\sqrt{G_2}}},$$

展开并且利用上面的第一式得到

$$\sqrt{E_1G_2}+\frac{F_1F_2}{\sqrt{E_1G_2}}=\sqrt{E_2G_1}+\frac{F_1F_2}{\sqrt{E_2G_1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_2G_1}}=\frac{1}{\sqrt{E_1G_2}},$$

由此便得到

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{G_1}{G_2}=\frac{F_1}{F_2},$$

这说明条件（13）成立，即 σ 是保角对应。

保角对应的最重要的性质是下面的定理：

定理3 任意一个正则曲面上每一点都有一个邻域，它可以和平面上的一个邻域建立保角对应．因此任意两个正则曲面在局部上必定存在保角对应．

这是一个十分深刻的定理．在曲面的参数方程是解析的情形，不难利用一次微分形式的积分因子的存在性（见附录 §1）来证明；但在曲面的方程是光滑的情形，证明很复杂，特别是在曲面的参数方程是二次以上连续可微的情形，陈省身证明该定理也是成立的（证明可看：S. S. Chern, Selected Papers, p. 217）．

在平面 E^2 上取笛卡儿直角坐标系 (u,v)，则它的第一基本形式成为 du^2+dv^2．因此定理3的第一个论断的意思是：在任意一个正则曲面上任意一点的一个充分小的邻域内存在参数系 (u,v)，使得曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=\lambda^2(u,v)(du^2+dv^2). \tag{15}$$

曲面上使第一基本形式表成（15）式的参数系称为**等温参数系**．综合 §1 的习题第2题及 §3 的习题第2题的结果可以知道，球极投影建立了球面与平面的保角对应．这个结果可以用立体几何的初等证法来证明．因此 §3 第2题中的参数 (u,v) 是球面上的等温参数系．下面的例子给出了球面和平面之间的另一种保角对应，这两种保角对应是地图学常用的两种画地图的方法．

例2 Mercator 投影

设 S 是半径为 a 的球面，$\tilde{S}$ 是半径为 a 的圆柱面，设它们的参数方程分别为

$$\boldsymbol{r}=\left(a\cos v\cos\frac{u}{a},a\cos v\ \sin\frac{u}{a},a\sin v\right),$$

$$\boldsymbol{r}=\left(a\cos\frac{\tilde{u}}{a},a\sin\frac{\tilde{u}}{a},\tilde{v}\right)$$

它们的第一基本形式分别为

$$I=\cos^2 v\mathrm{d}u^2+a^2\mathrm{d}v^2,$$

$$\tilde{I}=\mathrm{d}\tilde{u}^2+\mathrm{d}\tilde{v}^2.$$

命

$$\tilde{u}=u,\qquad \tilde{v}=\int_0^v\frac{a\mathrm{d}v}{\cos v}=a\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

则相应的映射 σ 就是从球面 S 到圆柱面 $\tilde{S}$ 的保角对应．从 $\tilde{S}$ 的第一基本形式可知，$\tilde{S}$ 与平面是等距的．

习　题

∘ 1．证明：在悬链面

$$\boldsymbol{r}=\left(a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\cos\theta,a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\sin\theta,t\right),$$

$$-\infty<t<+\infty,\qquad 0<\theta<2\pi$$

与正螺旋面

$$\boldsymbol{r}=(v\cos u,v\sin u,au),\qquad 0<u<2\pi,\quad -\infty<v<+\infty$$

之间，存在保长对应．

∘ 2．证明：曲面 $\boldsymbol{r}=(a(\cos u+\cos v),a(\sin u+\sin v),b(u+v))$ 和一个旋转面能够建立保长对应．

3．证明：平面到它自身的任意一个保长对应必定是平面上的一个刚体运动（或与关于一条直线的反射的合成）．

∘ 4．试建立旋转面

$$\boldsymbol{r}=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$$

与平面的保角对应.

°5. 试建立第2题中的曲面与平面的保角对应。

§6 可展曲面

在这一节我们要研究一类特殊的曲面，以后我们会知道这类曲面恰好是与平面在局部上能够建立保长对应的曲面.

在§1已经说过，一般的直纹面的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u)$，其中 $\boldsymbol{l}(u)\neq 0$. 柱面、锥面和一条曲线的切线面都是特殊的直纹面（见图19），它们的方程分别为

柱面： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}$，其中 $\boldsymbol{l}$ 是非零常向量；

锥面： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{l}(u)$，其中 $\boldsymbol{a}$ 是常向量；

切线面：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{a}'(u)$.

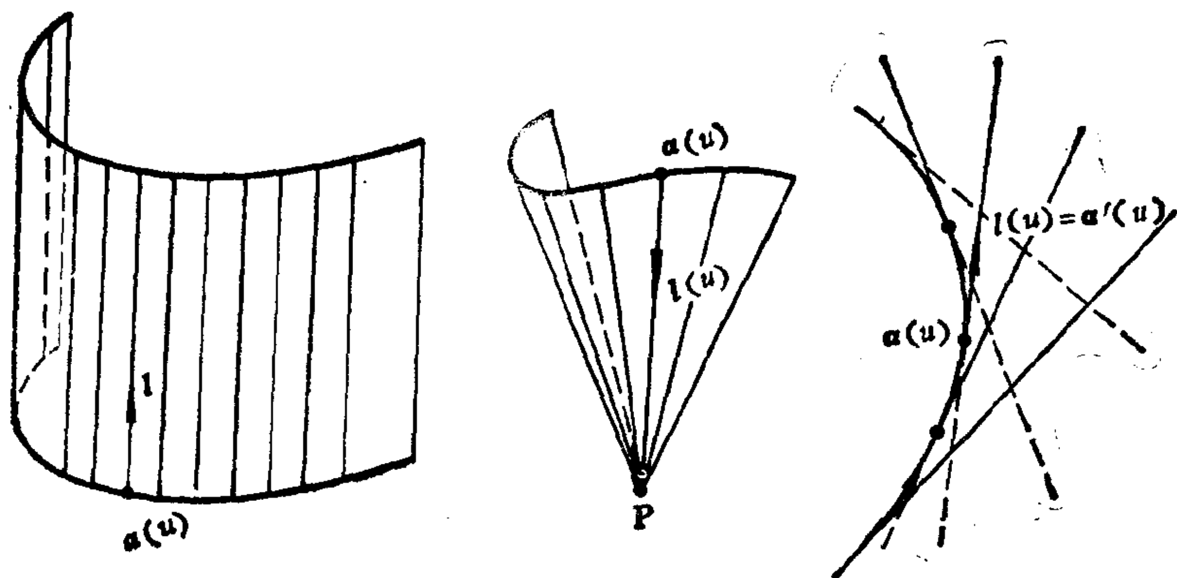


图 19

直接计算可知，这些曲面的一个共同特征是：切平面沿直母线是不变的，即它们在各点的切平面是依赖单个参数的平面族. 以切线面为例：

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{a}''(u),$$
$$\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{a}'(u),$$

所以

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = -v\boldsymbol{a}'(u) \times \boldsymbol{a}''(u),$$

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{a}'(u) \times \boldsymbol{a}''(u)}{|\boldsymbol{a}'(u) \times \boldsymbol{a}''(u)|}.$$

因为单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 只依赖参数 u，故沿着直母线（即 v-曲线）切平面不变.

定义 如果 S 是直纹面，并且 S 的切平面沿直母线是不变的，则称 S 是**可展曲面**.

前面的讨论说明，柱面、锥面、切线面都是可展曲面. 下面的命题给出了可展曲面的判别准则.

定理1 设直纹面 S 的方程是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{l}(u)$，则 S 是可展曲面的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{a}'(u), \boldsymbol{l}(u), \boldsymbol{l}'(u)) = 0. \tag{1}$$

证明 由 S 的方程得到

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{a}'(u) + v\boldsymbol{l}'(u), \qquad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{l}(u),$$

故

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\boldsymbol{a}'(u) + v\boldsymbol{l}'(u)) \times \boldsymbol{l}(u).$$

若 S 是可展曲面，则在 v- 曲线上任意两个不同点 (u, v_1) 和 (u, v_2)，其中 $v_1 \neq v_2$，曲面的法向量应该平行，即

$$(\boldsymbol{a}'(u) + v_1\boldsymbol{l}'(u)) \times \boldsymbol{l}(u) /\!/ (\boldsymbol{a}'(u) + v_2\boldsymbol{l}'(u)) \times \boldsymbol{l}(u).$$

根据双重向量积的公式，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= [(\boldsymbol{a}'(u) + v_1\boldsymbol{l}'(u)) \times \boldsymbol{l}(u)] \times [(\boldsymbol{a}'(u) + v_2\boldsymbol{l}(u)) \times \boldsymbol{l}(u)] \\ &= (\boldsymbol{a}'(u) + v_1\boldsymbol{l}'(u), \boldsymbol{a}'(u) + v_2\boldsymbol{l}'(u), \boldsymbol{l}(u))\boldsymbol{l}(u) \\ &= (v_1 - v_2) \cdot (\boldsymbol{a}'(u), \boldsymbol{l}(u), \boldsymbol{l}'(u))\boldsymbol{l}(u). \end{aligned}$$

由于 $(v_1 - v_2)\boldsymbol{l}(u) \neq 0$，故 (1) 式成立. 上面的论证过程是可逆的，因此 (1) 也是曲面 S 为可展曲面的充分条件.

注意到在直纹面上可能会有两个不同的连续单参数直线族，因而是否会发生这样的情况：对于其中一族直线，条件 (1) 成立，而对于另一族直线，条件 (1) 却不成立？可以证明：存在

两族直线的直纹面只能是单叶双曲面、双曲抛物面和平面①，而前两者都不是可展曲面，因此前面提到的情况是不会出现的．另外，对于直纹面的方程，准线$\boldsymbol{a}(u)$ 可以换成 $\boldsymbol{a}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}(u)$，方向向量 $\boldsymbol{l}(u)$ 也可改变长度成为 $\mu(u)\boldsymbol{l}(u)$，其中 $\mu(u)>0$，但是这些变换都不会改变条件 (1)．由此可见，要判断一个直纹面是否为可展曲面，只要就它的一种参数表示进行检验就行了．

定理2 可展曲面只有柱面、锥面、切线面这三类曲面．

证明 设 S 是可展曲面，故它的方程可写成

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u),$$

其中 $\boldsymbol{a}(u),\boldsymbol{l}(u)$ 满足条件 (1)．

如果 $\boldsymbol{l}'(u)\times\boldsymbol{l}(u)\equiv 0$，则由第一章§2 命题 2，向量 $\boldsymbol{l}(u)$ 有确定的方向，故直母线平行，S 是一个柱面．

假定 $\boldsymbol{l}'(u)\times\boldsymbol{l}(u)\neq 0$，故条件 (1) 意味着向量 $\boldsymbol{a}'(u)$ 落在 $\boldsymbol{l}(u)$ 和 $\boldsymbol{l}'(u)$ 所张成的子空间内，不妨设

$$\boldsymbol{a}'(u)=\alpha(u)\boldsymbol{l}(u)+\beta(u)\boldsymbol{l}'(u). \tag{2}$$

现在让准线作一个变换：

$$\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{a}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}(u),$$

要求 $\boldsymbol{b}'(u)/\!/\boldsymbol{l}(u)$．因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'(u)&=\boldsymbol{a}'(u)+\lambda'(u)\boldsymbol{l}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}'(u)\\&=(\alpha(u)+\lambda'(u))\boldsymbol{l}(u)+(\beta(u)+\lambda(u))\boldsymbol{l}'(u),\end{aligned}$$

只要取 $\lambda(u)=-\beta(u)$ 即可，也就是

$$\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{a}(u)-\beta(u)\boldsymbol{l}(u). \tag{3}$$

现在

$$\boldsymbol{b}'(u)=(\alpha(u)-\beta'(u))\boldsymbol{l}(u),$$

如果 $\alpha(u)-\beta'(u)\equiv 0$，则 $\boldsymbol{b}'(u)\equiv 0$，于是 $\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{b}_0$ 是常向量，这时曲面上的直母线都通过定点 $\boldsymbol{b}_0$，故该曲面是锥面．如果

---

① 参看：D.希尔伯特，S. 康福森著，王联芳译，直观几何（上册），人民教育出版社，1959年12月第一版，p.16．

$\alpha(u)-\beta'(u)\neq 0$，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}(u)$ 是一条正则曲线，而且

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{b}(u)+\frac{v+\beta(u)}{\alpha(u)-\beta'(u)}\boldsymbol{b}'(u),$$

这说明 S 是曲线 $\boldsymbol{b}(u)$ 的切线面. 证毕.

可展曲面的另一个特征是它和平面在局部上可以建立保长对应，对于柱面和锥面而言这在直观上是明显的. 在此，我们只能证明必要性，而充分性留待第五章处理.

定理3 可展曲面在局部上可以与平面建立保长对应.

证明 因为可展曲面分为柱面、锥面、切线面三大类，故我们只要证明每一类曲面都可以与平面建立保长对应.

(1) 柱面. 其参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}_0, \tag{4}$$

不妨设 $|\boldsymbol{l}_0|=1$. 作准线变换

$$\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{a}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}_0, \tag{5}$$

使得 $\boldsymbol{b}(u)$ 与方向向量 $\boldsymbol{l}_0$ 正交. 为此只要取 $\lambda=-\boldsymbol{a}(u)\cdot\boldsymbol{l}_0$ 即可. 这样，曲面的方程成为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{b}(u)+(v+\lambda(u))\boldsymbol{l}_0.$$

作参数变换

$$\begin{cases}\tilde{u}=\int|\boldsymbol{b}'(u)|\,\mathrm{d}u,\\ \tilde{v}=v+\lambda(u),\end{cases} \tag{6}$$

于是曲面方程成为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}(\tilde{u})+\tilde{v}\boldsymbol{l}_0,$$

其中

$$|\boldsymbol{l}_0|=1,\qquad |\boldsymbol{b}'(\tilde{u})|=1 \text{ 且 } \boldsymbol{b}'(\tilde{u})\cdot\boldsymbol{l}_0=0.$$

因此曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=(\mathrm{d}\tilde{u})^2+(\mathrm{d}\tilde{v})^2. \tag{7}$$

很明显，(7) 正是平面在笛卡儿坐标系下的第一基本形式，故(6)式就是曲面(4)到平面的保长对应.

(2) 锥面. 设曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}_0+v\boldsymbol{l}(u). \tag{8}$$

可以要求 $|\boldsymbol{l}(u)|=1$，且 u 是单位球面上的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{l}(u)$ 的弧长参数，故 $|\boldsymbol{l}'(u)|=1$. 这样，曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=v^2\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2.$$

命

$$\begin{cases}x=v\cos u,\\ y=v\sin u,\end{cases} \tag{9}$$

则得

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2,$$

所以（9）式是从锥面（8）到平面的保长对应.

（3）切线面. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是 E^3 中的一条正则曲线，s 是弧长参数，故它的切线面方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)+t\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{\alpha}(s), \tag{10}$$

因此

$$\boldsymbol{r}_s=\boldsymbol{\alpha}(s)+t\kappa\boldsymbol{\beta}(s),$$
$$\boldsymbol{r}_t=\boldsymbol{\alpha}(s),$$

所以

$$E=1+t^2\kappa^2,\qquad F=1,\qquad G=1,$$

曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+t^2\kappa^2)\mathrm{d}s^2+2\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\mathrm{d}t^2. \tag{11}$$

注意到在 I 中不含有曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的挠率，这就是说，空间 E^3 中任意两条有相同的弧长参数和曲率函数的曲线必有彼此成保长对应的切线面. 特别是，根据曲线论基本定理我们可以作一条以 s 为弧长、以 $\kappa(s)$ 为曲率的平面曲线，它的切线面是平面的一部分，因此曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切线面必可与平面在局部上建立保长对应. 证毕.

习　题

1. （1）证明：曲面 $\boldsymbol{r}=\left(u^2+\dfrac{v}{3},\ 2u^3+uv,\ u^4+\dfrac{2u^2v}{3}\right)$ 是

可展曲面；

(2) 证明：$r=(\cos v-(u+v)\sin v,\ \sin v+(u+v)\cos v, u+2v)$ 是可展曲面．它是哪一类可展曲面？

(3) 证明：$r=(a(u+v), b(u-v), 2uv)$ 不是可展曲面．

2．证明：挠率不为零的曲线的主法线和次法线分别生成的直纹面都不是可展曲面．

3．对于挠率不为零的曲线，是否有单参数法线族构成可展曲面？若有，求出所有可能的这种可展曲面．

4．已知空间挠曲线 $r=r(s)$，s 为弧长参数，求定义在曲线上的向量场 $l(s)=\lambda(s)\alpha(s)+\mu(s)\gamma(s)$，使得由 $l(s)$ 生成的、以已知曲线为准线的直纹面是可展曲面．

5．设 C 是直纹面 S 上与直母线处处正交的一条曲线，曲面 S 沿曲线 C 的法线生成另一个直纹面 $\tilde{S}$．证明：$\tilde{S}$ 是可展曲面的充分必要条件为 S 是可展曲面．

第四章　曲面的第二基本形式

§1　第二基本形式

在上一章我们已经对曲面的概念作了讨论，并且初步研究了曲面上与度量有关的性质．现在我们要着手研究空间 E^3 中曲面的形状，首先讨论描写曲面在一点的弯曲程度的方法．

设 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是一块正则曲面．曲面 S 在点 (u_0,v_0) 的切平面 π 有单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\left.\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\right|_{(u_0,v_0)}. \tag{1}$$

很明显，刻画曲面 S 在 (u_0,v_0) 处的弯曲程度的最直观的量就是该点的邻近点到平面 π 的有向距离 δ（见图20）．

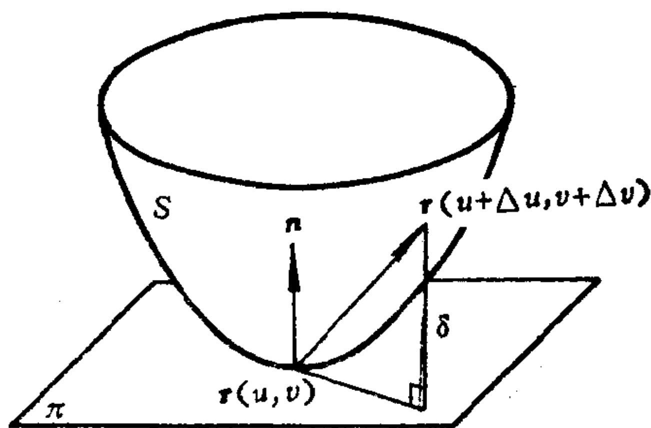


图　20

显然，邻近点 $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ 到平面 π 的有向距离是

$$\delta(\Delta u,\Delta v)=[\boldsymbol{r}(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0)]\cdot\boldsymbol{n}. \tag{2}$$

根据 Taylor 展式，我们有

$$\boldsymbol{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$$

$$=(\boldsymbol{r}_u|_{(u_0,v_0)}\Delta u+\boldsymbol{r}_v|_{(u_0,v_0)}\Delta v)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{uu}|_{(u_0,v_0)}\Delta u^2$$

$$+2\boldsymbol{r}_{uv}|_{(u_0,v_0)}\Delta u\Delta v+\boldsymbol{r}_{vv}|_{(u_0,v_0)}\Delta v^2)+\boldsymbol{o}(\Delta u^2+\Delta v^2),$$

其中

$$\lim_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0}\frac{|\boldsymbol{o}(\Delta u^2+\Delta v^2)|}{\Delta u^2+\Delta v^2}=0.$$

因此

$$\delta(\Delta u, \Delta v)=\frac{1}{2}(L\Delta u^2+2M\Delta u\Delta v+N\Delta v^2)+o(\Delta u^2+\Delta v^2), \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} L&=\boldsymbol{r}_{uu}|_{(u_0,v_0)}\cdot\boldsymbol{n}, \\ M&=\boldsymbol{r}_{uv}|_{(u_0,v_0)}\cdot\boldsymbol{n}, \\ N&=\boldsymbol{r}_{vv}|_{(u_0,v_0)}\cdot\boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

由于 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以 L,M,N 还能表示成

$$L=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad M=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad N=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v. \tag{5}$$

在（3）式中，有向距离 $\delta(\Delta u, \Delta v)$ 的主要部分是二次微分式$\frac{1}{2}(L\Delta u^2+2M\Delta u\Delta v+N\Delta v^2)$，这启示我们考虑

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2. \tag{6}$$

首先我们要指出二次微分式Ⅱ与曲面上保持定向的容许参数变换是无关的．假定有参数变换

$$\begin{cases} u=u(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v=v(\tilde{u}, \tilde{v}), \end{cases} \tag{7}$$

并且

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}>0,$$

因此

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\times\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v,$$

$$\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}. \tag{8}$$

并且

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_{\tilde{u}}\\ \boldsymbol{n}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_u\\ \boldsymbol{n}_v\end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{u}}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\tilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{v}}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

由（5）式得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{M}\\ \tilde{M} & \tilde{N}\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{n}_{\tilde{u}},\boldsymbol{n}_{\tilde{v}})\\ &=-J\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}(\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{n}_v)\cdot J'\\ &=J\cdot\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\cdot J'.\end{aligned} \tag{11}$$

由此可见，L,M,N 在保持定向的参数变换下的变换规律与第一类基本量 E,F,G 的变换规律是相同的．注意到

$$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=(\mathrm{d}\tilde{u},\mathrm{d}\tilde{v})\cdot J, \tag{12}$$

所以

$$\begin{aligned}&L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2\\ &=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}\\ &=(\mathrm{d}\tilde{u},\mathrm{d}\tilde{v})\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{M}\\ \tilde{M} & \tilde{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{u}\\ \mathrm{d}\tilde{v}\end{pmatrix}\\ &=\tilde{L}\mathrm{d}\tilde{u}^2+2\tilde{M}\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}+\tilde{N}\mathrm{d}\tilde{v}^2.\end{aligned} \tag{13}$$

这说明Ⅱ在曲面的保持定向的容许参数变换下是不变的. 我们称Ⅱ为曲面的**第二基本形式**，L, M, N 为曲面的**第二类基本量**. 上述不变性还有更简明的观察. 实际上，由于（5）式，Ⅱ可以表示成

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}. \tag{14}$$

在保持定向的参数变换下，单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 是不变的；而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 分别是向量函数 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}$ 的一次微分，由于一次微分的形式不变性，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 是不变的. 从上面的讨论可以看出，若参数变换是翻转曲面的定向的，则把单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 变成单位法向量 $-\boldsymbol{n}$，所以第二基本形式恰好改变它的符号. （3）式告诉我们，Ⅱ的直接的几何意义是：它是有向距离 $\delta(\Delta u, \Delta v)$ 的主要部分的 2 倍，即 $\mathrm{II} \approx 2\delta(\Delta u, \Delta v)$.

例 平面和圆柱面的第二基本形式.

设 S_1 是 E^3 中的 xy-平面，所以它的参数方程是

$$\boldsymbol{r} = (u, v, 0).$$

它的单位法向量是常向量

$$\boldsymbol{n} = (0, 0, 1),$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

设圆柱面 S_2 的方程是

$$\boldsymbol{r} = \left(a\cos\frac{u}{a}, a\sin\frac{u}{a}, v\right),$$

故

$$\boldsymbol{r}_u = \left(-\sin\frac{u}{a}, \cos\frac{u}{a}, 0\right),$$

$$\boldsymbol{r}_v = (0, 0, 1),$$

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \left(\cos\frac{u}{a}, \sin\frac{u}{a}, 0\right) = \boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a},\ -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a},0\right),$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{r}_{vv}=0.$$

因此

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=1,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=1,$$

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{a},\qquad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2,\\ \mathrm{II}&=-\frac{1}{a}\mathrm{d}u^2.\end{aligned}\tag{16}$$

由此可见，平面 S_1 和圆柱面 S_2 虽然在局部上可以建立保长对应，但是它们的第二基本形式在保长对应下是不同的，这反映了它们的形状是不同的.

下面两个定理分别用第二基本形式给出了平面和球面的特征.

定理 1 一块正则曲面是平面的充分必要条件是它的第二基本形式恒等于零.

证明 必要性在前面已经得到证明，现在只要证明充分性.设曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$

我们要证明它的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 是常向量. 由于 $\mathrm{II}\equiv 0$，故我们有

$$\begin{aligned}L&=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\\ M&=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\\ N&=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0.\end{aligned}\tag{17}$$

此外，由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量场，故有

$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}=0.\tag{18}$$

注意到 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}\}$ 构成 E^3 中的标架，而 (17)，(18) 两式

表明 $\boldsymbol{n}_u$，$\boldsymbol{n}_v$ 在 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$ 上的投影都是零，所以 $\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{n}_v$ 都是零向量，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}v+\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v\equiv 0,$$

故 $\boldsymbol{n}$ 是曲面上的常向量场．由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

所以

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=0,$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\text{常数},$$

或

$$(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0))\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

这说明曲面落在通过点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$、以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面内．

定理 2 一块正则曲面是球面的充分必要条件是在曲面上每一点，第二基本形式是第一基本形式的非零倍数．

证明 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 落在一个球面上，则必有常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 及常数 R，使曲面的方程满足

$$(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2.$$

对方程两边进行微分得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}_0)=0,$$

由此可见，曲面的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}_0).$$

因此

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\frac{1}{R}\mathrm{I}.$$

反过来，假定有处处不为零的函数 $c(u,v)$，使得曲面的第一基本形式和第二基本形式满足

$$\mathrm{II}=c(u,v)\cdot\mathrm{I},$$

即

$$(L-cE)\mathrm{d}u^2+2(M-cF)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(N-cG)\mathrm{d}v^2=0. \qquad (19)$$

由于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的任意性，不难知道

$$
\begin{aligned}
L(u,v)&=c(u,v)\cdot E(u,v),\\
M(u,v)&=c(u,v)\cdot F(u,v),\\
N(u,v)&=c(u,v)\cdot G(u,v).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

根据第一类基本量和第二类基本量的定义，（20）式等价于

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{n}_u+c\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\\
(\boldsymbol{n}_u+c\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{n}_v+c\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\\
(\boldsymbol{n}_v+c\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{r}_v=0.
\end{gathered}
$$

另一方面，由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位法向量场，所以

$$
(\boldsymbol{n}_u+c\boldsymbol{r}_u)\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{n}_v+c\boldsymbol{r}_v)\cdot\boldsymbol{n}=0.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_u+c\boldsymbol{r}_u&=0,\\
\boldsymbol{n}_v+c\boldsymbol{r}_v&=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

将（21）的两式分别对于 v,u 求导，得到

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{n}_{uv}+c_v\boldsymbol{r}_u+c\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0,\\
\boldsymbol{n}_{vu}+c_u\boldsymbol{r}_v+c\cdot\boldsymbol{r}_{vu}=0,
\end{gathered}
$$

所以

$$
c_v\boldsymbol{r}_u=c_u\boldsymbol{r}_v.
$$

由于 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 是线性无关的，所以只能有

$$
c_u=c_v\equiv0,
$$

即 $c(u,v)=c$ 是常数．这样，从（21）式得到

$$
\mathrm{d}(\boldsymbol{n}+c\cdot\boldsymbol{r})=0,
$$

即 $\boldsymbol{n}+c\boldsymbol{r}$ 是定义在曲面上的常向量场．不妨设

$$
\boldsymbol{n}(u,v)+c\boldsymbol{r}(u,v)=c\cdot\boldsymbol{r}_0,\quad c\neq0,
$$

于是

$$
(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}_0)^2=\frac{1}{c^2},
$$

即曲面落在以 $\boldsymbol{r}_0$ 为中心、以 $\frac{1}{|c|}$ 为半径的球面上．

注意，定理 2 的条件的意思是：在每一点曲面沿各个方向上

弯曲的程度都是相同的．这个事实利用下一节的法曲率的概念会变得更加明显．而定理2的结论是很强的，它意味着：如果曲面在每一个固定点沿各个方向的弯曲程度是相同的，则它在各个点、沿各个方向的弯曲程度都是一样的．

习　题

1．求下列曲面的第二基本形式：

(1) $r=(a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, b\sin\varphi)$.

(2) $r=\left(u, v, \dfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right)$,

(3) $r=(a(u+v), a(u-v), 2uv)$.

2．求曲线 $r=r(s)$ 的切线面的第二基本形式，其中 s 是曲线的弧长参数．

3．求曲面 $z=f(x,y)$ 的第一、第二基本形式．

4．证明：当曲面在空间 E^3 中作刚体运动时，它的第一基本形式和第二基本形式是不变的．

5．直接证明：如果在可展曲面 S 上存在两个不同的单参数直线族，则 S 必定是平面（本题同时说明了非平面的可展曲面上不可能存在两个不同的单参数直线族）．

§2　法　曲　率

上一节所定义的第二基本形式直观地反映了曲面的弯曲程度．曲面的弯曲程度还可以通过研究落在曲面上的曲线来了解，而且曲面上曲线的曲率与曲面的第二基本形式有关．例如，下面我们会看到，球面上的曲线的曲率不会是零．

设曲面 S 的方程是 $r=r(u,v)$，它上面的曲线可以用参数方程

$$u=u(s), \qquad v=v(s)$$

来表示，其中 s 是弧长参数．作为空间 E^3 中的曲线，它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s),v(s)),$$

于是它的单位切向量是

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

曲率向量是

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}&=\kappa\boldsymbol{\beta}\\&=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2\\&\quad+\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}.\end{aligned}$$

因此，曲线的曲率向量在曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影是

$$\begin{aligned}\kappa_n&=\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{n}=\kappa(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\\&=L\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2M\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+N\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2.\end{aligned}\tag{1}$$

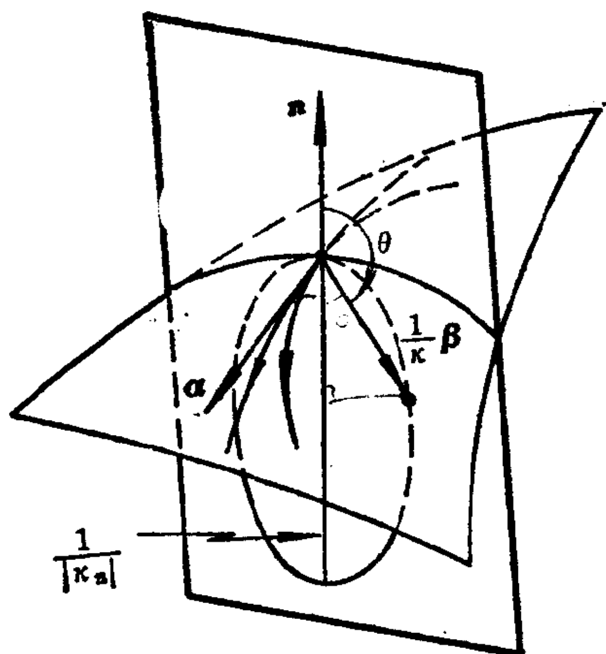


图 21

从上面的表达式可以知道 κ_n 只与曲线的切方向 $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)$ 有关，称为**曲线的法曲率**．若命 $\angle(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n})=\theta$，则有

$$\kappa_n=\kappa\cos\theta.\tag{2}$$

由此可见，曲面上在一点相切的曲线在该点有相同的法曲率．并且对于曲面上经过一个固定点 P、且在该点相切的全体曲线来说，它们的曲率中心的轨迹是在与该切方向垂直的

平面内的一个圆周（见图21）．实际上

$$\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{\kappa_n}\cos\theta,\tag{3}$$

$$\begin{aligned}c&=r(s)+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\beta}\\&=r(s)+\frac{1}{\kappa_n}\cos\theta\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

所以曲率中心 c 落在以 $\left|\frac{1}{\kappa_n}\right|$ 为直径的一个圆周上．

由于曲面上在一点相切的曲线在该点有相同的法曲率，所以法曲率实际上是曲面上的切方向的函数．我们可以把这一点说得更清楚一些．由于 s 是弧长参数，所以

$$|\dot{r}(s)|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1,$$

即

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=\mathrm{I}.$$

这样，（1）式成为

$$\kappa_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.\tag{4}$$

这个表达式的分子、分母分别是 du,dv 的二次齐式，因此它们的比只是$\frac{du}{dv}$的函数．正因为如此，我们把 κ_n 叫做曲面在点 (u,v)、沿切方向 (du,dv) 的**法曲率**．这样，曲面在点 (u,v)、沿切方向 (du,dv) 的法曲率正好等于曲面上经过该点、且与该方向相切的曲线在该点的法曲率．

在点 (u,v)，由切方向 (du,dv) 和曲面在该点的法线决定了一个平面，称为曲面在该点由切方向 (du,dv) 确定的**法截面**．法截面与曲面相交成一条平面曲线，称为曲面在该点的一条**法截线**．法截线可以作为曲面上经过点 (u,v)、且与方向 (du,dv) 相切的曲线的代表．由于它是平面曲线，且在点(u,v) 以曲

面的法向量为法向量，因而是它的主法向量，所以（2）式中的 $\theta=0°$或180°，即

$$|\kappa_n|=\kappa.$$

我们规定：在点 (u,v) 由切方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 确定的法截面的定向以切方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 到曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的旋转方向为正向．这样，上面的结果可以确切地叙述为：

定理1 曲面在点 (u,v)、沿切方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 的法曲率 κ_n 等于曲面上由该切方向决定的法截线作为相应的法截面内的平面曲线在该点的相对曲率．

在直观上，用法截线的曲率去刻划曲面的弯曲程度是很自然的．法截面就象一把刀，法截线就是用这把刀在曲面上切割所成的剖面线．如果我们对于各个方向的剖面线在该点的曲率都有所了解，则对于曲面在该点的弯曲情况就完全清楚了．这正是 Euler 观察曲面形状的基本出发点．所谓 Euler 公式就是具体地给出法曲率作为方向的函数，在下一节将要研究这个问题．

例 平面的第二基本形式 $\mathrm{II}\equiv 0$，所以法曲率 $\kappa_n\equiv 0$．显然，平面上沿任意一个切方向的法截线是直线．

在§1已经算出圆柱面$\boldsymbol{r}=\left(a\cos\frac{u}{a},a\sin\frac{u}{a},v\right)$的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{II}=-\frac{1}{a}\mathrm{d}u^2.$$

所以法曲率是

$$\kappa_n=-\frac{\mathrm{d}u^2}{a(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)}.$$

若用θ表示切方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ 与 u-曲线的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}}.$$

所以

$$\kappa_n = -\frac{1}{a}\cos^2\theta,$$

它界于$-\frac{1}{a}$与0之间．在这里，Ⅱ中的负号说明 n 是曲面的外法向量，曲面是朝$-n$ 的方向弯曲的．

§1的定理2说明，球面的法曲率$\kappa_n = -\frac{1}{R}$（若 n 是球面的外法向量），即球面的法曲率是非零常数．很明显，球面的法截线都是半径为 R 的大圆周．由于 $\kappa_n = \kappa\cos\theta$，所以对于球面上的曲线，必有$\kappa \neq 0$．

定义 在曲面上一点，使法曲率为零的方向称为曲面在该点的渐近方向．若曲面上一条曲线在每一点的切向量都是曲面在该点的渐近方向，则称该曲线为曲面上的一条渐近曲线．

在固定一点 (u,v)，渐近方向就是二次方程

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \tag{5}$$

的解．显然，曲面在点 (u,v) 有实渐近方向的充分必要条件是在该点成立

$$LN - M^2 \leqslant 0.$$

当 $LN - M^2 < 0$ 时，有两个不同的实渐近方向；在 $LN - M^2 = 0$ 时，只有一个实渐近方向(或认为两个实渐近方向合而为一)．将 (u,v) 看作动点，则方程 (5) 也是渐近曲线的微分方程．特别是，如果在曲面上处处有 $LN - M^2 < 0$，则在曲面上存在两个处处线性无关的渐近方向场．根据第三章§4的定理1，在曲面上便有用渐近曲线构成的参数曲线网．

定理2 曲面上的参数曲线网是渐近曲线网的充分必要条件是 $L = N \equiv 0$.

证明是平凡的，留给读者自己完成．

定理3 曲面上的一条曲线是渐近曲线，当且仅当它是一条直线，或者它的密切平面是曲面的切平面．

证明 实际上，曲面上一条曲线的法曲率是

$$\kappa_n=\kappa\cos\theta,$$

其中 θ 是曲线的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角．因此，$\kappa_n=0$ 的充分必要条件是 $\kappa=0$，或者 $\cos\theta=0$．对于前者，该曲线是一条直线；对于后者，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 正交，即曲线的密切平面处处与 $\boldsymbol{n}$ 垂直．

习 题

1．设悬链面的方程为

$$\boldsymbol{r}=(\sqrt{u^2+a^2}\cos v,\sqrt{u^2+a^2}\sin v,a\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})),$$

求它的第一基本形式和第二基本形式，并求它在点（0，0）、沿切向量 $d\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v$ 的法曲率．

2．证明：曲面上一条曲线在任意一点的法曲率等于该曲线在该点、由其切向量决定的法截面上的投影曲线在该点的相对曲率．

3．求下列曲面上的渐近曲线：

（1）正螺旋面：$\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,bv)$．

（2）双曲抛物面：$\boldsymbol{r}=\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2},\dfrac{uv}{2}\right)$．

4．设 C 是曲面上一条非直线的渐近曲线，其参数方程为 $u=u(s)$，$v=v(s)$，其中 s 为弧长参数．证明：C 的挠率等于

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}(\dot v)^2 & -\dot u\dot v & (\dot u)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}.$$

5．设 n 是正整数，则 $\alpha_n=(r\cos t,r\sin t,\mathrm{sign}\,t\cdot|t|^n)$ 落在圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 上，试求曲线 α_n 在 $t=0$ 处的法曲率．验证：当 $n\geqslant2$ 时，曲线 α_n 在 $t=0$ 处的曲率中心在一个圆周上．写出这个圆周的方程．

§3 Gauss 映射和 Weingarten 映射

在本节我们首先介绍 Gauss 映射，然后把 Gauss 映射的切映射与曲面的第二基本形式联系起来，进而解决法曲率作为切方向函数的极值问题.

设 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是一块正则曲面，它在每一点处有一个确定的单位法向量 $\boldsymbol{n}(u,v)$. 将向量 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 作平行移动，使得它的起点在坐标原点 O 上，则它的终点便落在 E^3 中的单位球面 Σ 上，于是得到从 S 到 Σ 的一个可微映射 $g: S\to\Sigma$，使得

$$g(\boldsymbol{r}(u,v))=\boldsymbol{n}(u,v). \tag{1}$$

这个映射称为 **Gauss 映射**. 很明显，当曲面 S 弯曲得很厉害时，它的法向量 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 的变化就较大，因而曲面的 Gauss 映象的面积就比较大（见图22）. 因此，曲面的 Gauss 映象的面积的大小反映了曲面的弯曲程度，这正是 Gauss 观察曲面形状的出发点. 在下一节我们还要回来讨论这个问题.

在第三章我们已经提到过，两个曲面之间的可微映射在对应点的切空间之间诱导出一个线性映射，称为该映射的切映射. 现在，Gauss 映射 g 把曲面 S 映到单位球面 Σ，因此，它诱导的切映射 g_* 把 S 在点 P 的切空间 T_PS 线性地映到切空间 $T_{g(P)}\Sigma$.

设曲面 S 上的方程是 $u=u(t)$, $v=v(t)$，于是它在 Gauss 映射 g 下的象是

$$g(\boldsymbol{r}(u(t),v(t)))=\boldsymbol{n}(u(t),v(t)).$$

根据定义，

$$g_*\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}$$

$$=\boldsymbol{n}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{n}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

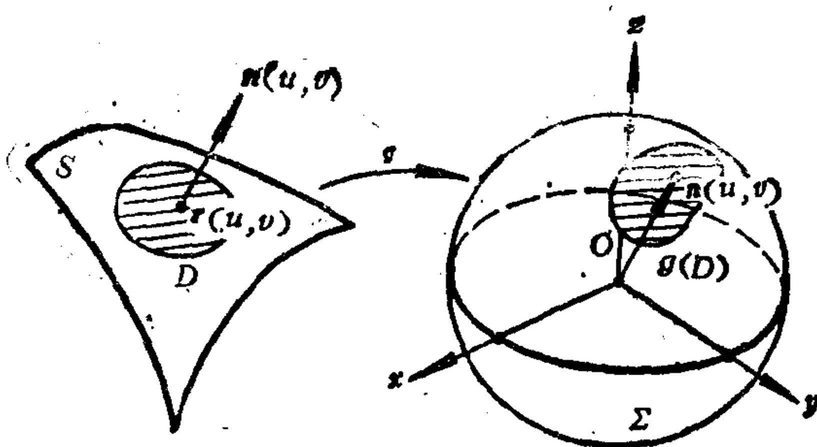


图 22

特别是，

$$\begin{cases} g_*(r_u)=n_u, \\ g_*(r_v)=n_v. \end{cases} \tag{2}$$

由于 Σ 的向径 n 本身也是 Σ 的法向量，所以 S 在 P 点的切平面与 Σ 在 $g(P)$ 的切平面是平行的。我们把 T_PS 和 $T_{g(P)}\Sigma$ 等同起来，把 n_u, n_v 看作 S 在点 P 的切向量，于是可以定义线性映射 $W: T_PS\to T_PS$ 如下：

$$W=-g_*:\ T_PS\to T_PS, \tag{3}$$

我们称 W 为曲面 S 在点 P 的 **Weingarten 映射**.

定理 1 曲面的第二基本形式可以表示成

$$\mathrm{II}=W(\mathrm{d}r)\cdot \mathrm{d}r.$$

证明 由 (2) 式可知

$$\begin{aligned} W(\mathrm{d}r) &= W(r_u\mathrm{d}u+r_v\mathrm{d}v) \\ &= -g_*(r_u)\mathrm{d}u-g_*(r_v)\mathrm{d}v \\ &= -(n_u\mathrm{d}u+n_v\mathrm{d}v)=-\mathrm{d}n, \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}n\cdot\mathrm{d}r=W(\mathrm{d}r)\cdot\mathrm{d}r.$$

定理 2 Weingarten 映射 W 是切空间 T_PS 到自身的自共轭映射，即对于在点 (u,v) 的任意两个切方向 $\mathrm{d}r$，δr 成立

$$W(\mathrm{d}r)\cdot\delta r=\mathrm{d}r\cdot W(\delta r).$$

证明 设 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$，$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$，因此

$$\boldsymbol{W}(d\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv),$$

$$\boldsymbol{W}(\delta\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{n}_u\delta u+\boldsymbol{n}_v\delta v).$$

这样

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(d\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}&=-(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)\\&=L du\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+N dv\delta v\\&=-(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)\cdot(\boldsymbol{n}_u\delta u+\boldsymbol{n}_v\delta v)\\&=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{W}(\delta\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

若有非零切向量 $d\boldsymbol{r}$ 及实数 λ，使得

$$\boldsymbol{W}(d\boldsymbol{r})=\lambda d\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

则称 λ 是线性变换 $\boldsymbol{W}$ 的一个实特征值，而 $d\boldsymbol{r}$ 称为对应于特征值 λ 的实特征向量．这时，

$$\boldsymbol{W}(d\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\lambda d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r},$$

所以由定理 1 可知，曲面沿特征向量 $d\boldsymbol{r}$ 的法曲率是

$$\kappa_n=\frac{\boldsymbol{W}(d\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}=\lambda.$$

这说明，如果 λ 是 Weingarten 映射 $\boldsymbol{W}$ 的一个实特征值，则它正好是曲面在该点沿对应的特征方向的法曲率．

现在，$\boldsymbol{W}: T_pS\to T_pS$ 是自共轭映射．根据线性代数理论，映射 $\boldsymbol{W}$ 有两个实的特征值（可能是重根），并且对应的有两个实的特征方向．特别是，当两个特征值不相等时，相应的两个特征方向是完全确定的，而且它们必彼此正交．如果这两个特征值相等，则特征方向不确定，也就是曲面在该点的任意一个切方向都是对应的特征方向．但是，无论是哪种情形，在曲面上的每一点总是存在两个彼此正交的特征方向．

定义 1 在曲面 S 上任意一点 P，Weingarten 映射的特征方向称为曲面在点 P 的主方向，曲面沿主方向的法曲率（即对应的 Weingarten 映射的特征值）称为曲面在该点的主曲率．

根据前面的讨论可以知道，曲面在每一点都有两个主曲率，

当两个主曲率不相等时，曲面在该点有两个确定的主方向，并且这两个主方向彼此垂直；如果两个主曲率相等，则主方向不定。无论如何，我们在 T_PS 中总是可以取单位正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，使得 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是曲面 S 在点 P 的主方向。设对应的主曲率是 κ_1,κ_2，因此

$$W(\boldsymbol{e}_1)=\kappa_1\boldsymbol{e}_1,\quad W(\boldsymbol{e}_2)=\kappa_2\boldsymbol{e}_2.$$

设 $\boldsymbol{e}$ 是 T_PS 中的任意一个单位切向量，它可以表示成

$$\boldsymbol{e}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2,$$

则

$$W(\boldsymbol{e})=\kappa_1\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\kappa_2\sin\theta\boldsymbol{e}_2.$$

因此沿切方向 $\boldsymbol{e}$ 的法曲率是

$$\begin{aligned}\kappa_n(\theta)&=\frac{W(\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}\\&=(\kappa_1\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\kappa_2\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\cdot(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\\&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

这就证明了下面的

定理 3（Euler 公式） 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是曲面 S 在点 P 的两个彼此正交的主方向单位向量，对应的主曲率是 κ_1,κ_2，则在点 P 沿任意一个单位切向量 $\boldsymbol{e}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$ 的法曲率是

$$\kappa_n(\theta)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.\tag{5}$$

从 Euler 公式不难看出，主方向正是法曲率取极值的方向，而主曲率恰好是法曲率的极值。实际上，我们有：

推论 如果 $\kappa_1\geqslant\kappa_2$，则曲面在该点沿任意一个切方向的法曲率满足不等式

$$\kappa_1\geqslant\kappa_n(\theta)\geqslant\kappa_2.\tag{6}$$

证明 由 Euler 公式得到

$$\begin{aligned}\kappa_n(\theta)&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\\&=(\kappa_1-\kappa_2)\cos^2\theta+\kappa_2\\&=\kappa_1-(\kappa_1-\kappa_2)\sin^2\theta,\end{aligned}$$

由于 $\kappa_1-\kappa_2\geqslant 0$，故 $\kappa_n(\theta)\geqslant\kappa_2$，且 $\kappa_n(\theta)\leqslant\kappa_1$.

注记 当 $\kappa_1=\kappa_2$ 时，$\kappa_n(\theta)=\kappa_1=\kappa_2$，这正是主方向不确定的情形．这样的点称为**脐点**．换言之，脐点就是第二基本形式与第一基本形式成比例的点，即$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$成立的点．若它们的比为零，则称该脐点为**平点**；若它们的比不是零，则称该脐点为**圆点**．因此，§1的定理1和定理2的意思是：曲面 S 是平面，当且仅当 S 上的点都是平点；曲面 S 是球面，当且仅当 S 上的点都是圆点．

定义2 设 C 是曲面 S 上的一条曲线，如果 C 在每一点的切向量都是曲面在该点的主方向，则称 C 是曲面 S 上的一条**曲率线**．

从定义可知曲率线是曲面 S 上主方向场的积分曲线．设曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一条曲线 C 的方程是

$$u=u(t),\quad v=v(t),$$

根据定义，C 是曲率线的条件是

$$W\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\lambda\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},$$

然而

$$W\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t},$$

所以我们有下面的定理：

定理4（Rodriques 定理） 曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一条曲线 $C:u=u(t)$，$v=v(t)$ 是曲率线的充分必要条件是曲面 S 沿曲线 C 的法向量场 $\boldsymbol{n}(u(t),v(t))$沿曲线 C 的微商是曲线 C 的一个切向量场，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\Big/\!\!/\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

作为定理4的推论，我们有

定理 5 曲面 S 上的一条曲线 C 是曲率线的充分必要条件是曲面 S 沿该曲线 C 的法线构成一个可展曲面.

证明 设曲面 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，曲线 C 的方程是 $u=u(s)$，$v=v(s)$，其中 s 是弧长参数. 设曲面 S 沿曲线 C 的单位法向量是 $\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}(u(s),v(s))$，因此曲面 S 沿曲线 C 的法线所构成的直纹面方程是

$$\boldsymbol{X}(s,t)=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{n}(s), \tag{**}$$

其中 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$. 根据第三章§6的定理1，直纹面 $\boldsymbol{X}(s,t)$ 是可展曲面的充分必要条件是

$$(\dot{\boldsymbol{r}}(s),\boldsymbol{n}(s),\dot{\boldsymbol{n}}(s))\equiv 0. \tag{9}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)=0$，$\dot{\boldsymbol{n}}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)=0$，所以 $\boldsymbol{n}(s)//\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s)$. 然而

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{r}}(s),\boldsymbol{n}(s),\dot{\boldsymbol{n}}(s)) &= -(\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s))\cdot\boldsymbol{n}(s)\\ &=\pm|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s)|,\end{aligned}$$

因此，条件 (9) 等价于$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s)\equiv 0$，或 $\dot{\boldsymbol{n}}(s)/\!/\dot{\boldsymbol{r}}(s)$，也就是曲线 C 是曲面 S 上的一条曲率线.

根据定理 5，旋转面上的经线和纬线都是曲率线. 因为旋转面沿经线的法线构成一个经过旋转轴的平面；沿纬线的法线都经过一个定点，故它们构成一个锥面. 无论是哪种情形，法线面都是可展曲面，故经线和纬线都是曲率线.

习 题

1. 证明：在曲面上任意一点，任意两个彼此正交的切方向上的法曲率之和是一个常数.

2. 设曲面 S_1，S_2 的交线 C 的曲率是 κ，曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率是 $\kappa_n^{(i)}(i=1,2)$. 假定 S_1 和 S_2 在交点的法线之间的夹角是 θ. 证明：

$$\kappa^2\sin^2\theta=(\kappa_n^{(1)})^2+(\kappa_n^{(2)})^2-2\kappa_n^{(1)}\kappa_n^{(2)}\cos\theta.$$

3. 证明：在可展曲面上，直母线既是渐近线，又是曲率线；

直母线的正交轨线是另一族曲率线.

4. 设曲面上的一条曲率线不是渐近曲线，并且它的密切平面与曲面的切平面交成定角，证明该曲线必是平面曲线.

5. 假定两个可展曲面相交成一条曲线，并且这条曲线与两个可展曲面的直母线分别正交. 证明：这两个曲面在各交点交成定角.

6. 证明：在曲面上任意一点 P 的某个邻域内都能取正交参数系 (u,v)，使得参数曲线在该点的切方向是彼此正交的主方向.

7. 设在曲面上一个固定点与一个主方向的夹角为 θ 的切方向所对应的法曲率记为 $\kappa_n(\theta)$，证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_n(\theta)\mathrm{d}\theta=H,$$

其中 $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$.

8. 在非脐点处，如果夹角为 θ_0 的任意两个切方向的法曲率之和为常数，则该夹角 θ 必为 $\frac{\pi}{2}$.

§4 主方向和主曲率的计算

在上一节，我们给出了关于法曲率的 Euler 公式，从而解决了法曲率的极大值、极小值问题. 在这一节，我们要给出具体的计算主方向和主曲率的方法.

设曲面 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，假定 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$ 是曲面的一个主方向，即：$(\delta u,\delta v)\neq 0$，且有实数 λ 使得

$$W(\delta\boldsymbol{r})=\lambda\delta\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

将 (1) 式展开就是

$$-(\boldsymbol{n}_u\delta u+\boldsymbol{n}_v\delta v)=\lambda(\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v). \tag{2}$$

将上式分别与 r_u，r_v 作内积，得到

$$L\delta u+M\delta v=\lambda(E\delta u+F\delta v),$$
$$M\delta u+N\delta v=\lambda(F\delta u+G\delta v),$$

所以 $(\delta u,\delta v)$ 应该满足线性方程组

$$\begin{cases}(L-\lambda E)\delta u+(M-\lambda F)\delta v=0,\\(M-\lambda F)\delta u+(N-\lambda G)\delta v=0.\end{cases} \tag{3}$$

换言之，实数 λ 应该使上述方程组有非零解 $(\delta u,\delta v)$. 根据线性方程组的理论，方程组 (3) 的系数行列式必须为零，即 λ 要满足二次方程

$$\begin{vmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

将 (4) 式展开，得到

$$\lambda^2(EG-F^2)-\lambda(LG-2MF+NE)+(LN-M^2)=0,$$

或者

$$\lambda^2-\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\lambda+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0. \tag{5}$$

根据上一节的讨论，二次方程 (5) 必有两个实根 κ_1,κ_2. 这个事实也能通过方程 (5) 的判别式来检验. 由二次方程的根与系数的关系可知

$$\begin{aligned}\kappa_1+\kappa_2&=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},\\ \kappa_1\kappa_2&=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

我们把 $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$ 称为曲面的平均曲率，把 $K=\kappa_1\kappa_2$ 称为曲面的 Gauss 曲率（或总曲率）. 从 (6) 式可知，曲面的平均曲率 H 和 Gauss 曲率 K 用曲面的第一类、第二类基本量的计

算公式是

$$
\begin{cases}
H=\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}, \\
K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}.
\end{cases}
\tag{7}
$$

这样，主曲率 κ_1,κ_2 是方程

$$\lambda^2-2H\lambda+K=0 \tag{8}$$

的根，即

$$\kappa_1=H-\sqrt{H^2-K}, \qquad \kappa_2=H-\sqrt{H^2-K}. \tag{9}$$

直接验证可知，方程（4）（即方程（5））与曲面的保持定向的参数变换是无关的，因而平均曲率 H 和 Gauss 曲率 K的表达式（7）是与保持定向的参数变换是无关的．

定理1　曲面的主曲率 κ_1,κ_2（假定 $\kappa_1\geqslant\kappa_2$）是定义在曲面上的连续函数，并且在每一个非脐点的一个邻域内，主曲率 κ_1,κ_2 是连续可微函数．

证明　由于假定曲面的参数方程至少是三次连续可微的，所以 H,K 都是连续可微函数．（9）式表明，κ_1,κ_2 都是连续函数．如果在一个邻域内 $\kappa_1>\kappa_2$，则 $H^2>K$，故 $\sqrt{H^2-K}$ 是连续可微函数，因而 κ_1,κ_2 是连续可微函数．

在脐点，由于$\dfrac{L}{E}=\dfrac{M}{F}=\dfrac{N}{G}=\kappa_1=\kappa_2$，故方程组（3）的系数矩阵等于零，任何非零数组 $(\delta u,\delta v)$ 都是（3）的解．这再次说明在脐点主方向是不定的．在非脐点，用 $\lambda=\kappa_1$ 或 κ_2 代入方程组（3）时，相应的系数矩阵的秩为1．所以与 $\lambda=\kappa_1$ 对应的主方向是

$$\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{M-\kappa_1F}{L-\kappa_1E}=-\frac{N-\kappa_1G}{M-\kappa_1F}, \tag{10}$$

与 $\lambda=\kappa_2$ 对应的主方向是

$$\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{M-\kappa_2 F}{L-\kappa_2 E}=-\frac{N-\kappa_2 G}{M-\kappa_2 F}. \tag{11}$$

方程组（3）还能改写成

$$\begin{cases}(L\delta u+M\delta v)-\lambda(E\delta u+F\delta v)=0,\\(M\delta u+N\delta v)-\lambda(F\delta u+G\delta v)=0,\end{cases} \tag{12}$$

即

$$\lambda=\frac{L\delta u+M\delta v}{E\delta u+F\delta v}=\frac{M\delta u+N\delta v}{F\delta u+G\delta v}.$$

后者说明，主方向 $(\delta u,\delta v)$ 满足方程

$$\begin{vmatrix}L\delta u+M\delta v & E\delta u+F\delta v\\ M\delta u+N\delta v & F\delta u+G\delta v\end{vmatrix}=0, \tag{13}$$

展开后重新整理便得到

$$\begin{vmatrix}(\delta v)^2 & -\delta u\delta v & (\delta u)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

很明显，在曲面上一个固定点（14）是求主方向的方程；如果在（14）中把 (u,v) 看作动点，则它恰好是曲面上的曲率线的微分方程.

定理 2 在曲面 S：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的任意一个固定点 (u,v)，参数曲线的方向是彼此正交的主方向的充分必要条件是在该点有 $F=M=0$. 此时，在该点 u-曲线方向的主曲率是 $\kappa_1=\frac{L}{E}$，v-曲线方向的主曲率是 $\kappa_2=\frac{N}{G}$.

证明 在方程（14）中，若 $(\delta u,\delta v)=(1,0)$ 是主方向，则 $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}$，若 $(\delta u,\delta v)=(0,1)$ 是主方向，则 $\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$. 现在假定在该点，$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 是彼此正交的主方向，因此 $F=0$，$M=0$.

反过来，如果假定在点 (u,v) 有 $F=M=0$，则 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$，并且（14）式成为

$$(EN-GL)\delta u\delta v=0,$$

故 $(\delta u,\delta v)=(1,0)$，$(\delta u,\delta v)=(0,1)$ 都是主方向.

推论 1 在曲面 S 上，参数曲线网是正交的曲率线网的充分必要条件是 $F\equiv M\equiv 0$.

推论 2 若在曲面 S 上取正交的曲率线网作为参数曲线网，则曲面的两个基本形式分别是

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= \kappa_1 E\mathrm{d}u^2+\kappa_2 G\mathrm{d}v^2, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 κ_1,κ_2 是曲面的主曲率.

上面两个推论是从定理 2 直接得到的，它们表明在曲面上取正交曲率线网作为参数曲线网可以使两个基本形式写成十分简单的表达式. 问题在于这样的参数曲线网是否存在？我们知道，曲面上非脐点的集合是一个开集. 若非脐点集是非空的，则定理 1 说主曲率函数 κ_1，κ_2 是这个非空开集上的连续可微函数，在每一点有完全确定的两个彼此正交的主方向. 因此，在非脐点集上存在两个连续可微的、处处彼此正交的主方向场. 根据第三章的 § 4 定理 1，在每一个非脐点的邻域内存在参数曲线网 (u,v)，使得参数曲线是彼此正交的曲率线. 如果在曲面上，脐点集是一个开集，则这一片曲面或者是平面，或者是球面，它上面的任意的正交参数曲线网都是曲率线网. 在孤立脐点的邻域内，情形是十分复杂的，不能保证有正交曲率线网的存在性. 但是，无论如何，在曲面上任意一点的一个邻域内都可以取参数曲线网（甚至是正交参数曲线网）使得在该点参数曲线的方向是彼此正交的主方向（上一节的习题 6）.

最后我们来导出 Weingarten 映射的矩阵. 设曲面的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 根据定义，

$$W(\boldsymbol{r}_u)=-\boldsymbol{n}_u, \qquad W(\boldsymbol{r}_v)=-\boldsymbol{n}_v.$$

因为 n_u, n_v 都是曲面的切向量，不妨设

$$\begin{pmatrix} -n_u \\ -n_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}, \tag{16}$$

因此

$$\begin{pmatrix} -n_u \\ -n_v \end{pmatrix} \cdot (r_u, r_v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \cdot (r_u, r_v),$$

即

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} LG-MF & -LF+ME \\ MG-NF & -MF+NE \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{17}$$

也就是

$$W\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \cdot \begin{pmatrix} LG-MF & -LF+ME \\ MG-NF & -MF+NE \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}. \tag{18}$$

线性变换在某个基底下的矩阵的迹和行列式是两个最重要的不变量，它们与基底的选取无关．在这里我们看到，映射 W 在自然基底$\{r_u, r_v\}$下的矩阵的迹和行列式正是 $2H$和 K，即

$$2H = a_{11} + a_{22} = \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

以后我们要引进一套带指标的张量记号（参看第五章），则矩阵（a_{ij}）的表达式（17）就比较容易记忆了.

从（16），（17）两式得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v &= \det(a_{ij})(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\\ &= K(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v).\end{aligned}$$

因此

$$|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| = |K| \cdot |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|. \tag{19}$$

注意到 $d\sigma_0 = |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| du dv$ 恰好是曲面上由参数曲线 $u, u+du, v, v+dv$ 所围的一小块在 Gauss 映射下的象的面积，因此

$$d\sigma_0 = |K| \cdot |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv = |K| \cdot d\sigma.$$

所以

$$\frac{d\sigma_0}{d\sigma} = |K|. \tag{20}$$

在曲线论中关于曲线的曲率有类似的解释（参看第二章§3第（5）式）. 如果D是曲面上围绕点P的一个小邻域，则 $g(D)$ 的面积是

$$A_0(g(D)) = \int_{g(D)} d\sigma_0 = \int_D |K| d\sigma,$$

由积分中值定理得到

$$\begin{aligned}A_0(g(D)) &= |K(\tilde{P})| \cdot \int_D d\sigma\\ &= |K(\tilde{P})| \cdot A(D),\end{aligned}$$

所以（20）式的确切意义就是

$$|K(P)| = \lim_{D \to P} \frac{A_0(g(D))}{A(D)}. \tag{21}$$

上式说明了 Gauss 曲率的几何意义. 所以用 Gauss 映射来描写曲面的弯曲程度的正是它的 Gauss 曲率. 在下一章，我们能够证明 Gauss 曲率是由曲面的第一基本形式决定的，这是一个极其深刻的结果.

顺便我们提一下曲面的第三基本形式．命

$$e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,\quad g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v, \tag{22}$$

那么

$$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2 \tag{23}$$

也是曲面上与参数表示无关的二次微分式，称为曲面的第三基本形式．实际上，如果用 I_0 表示单位球面 Σ 上的第一基本形式，则 III 恰好是将 I_0 通过 Gauss 映射 g 拉回到曲面上的形式，即

$$\mathrm{III}=g^*\mathrm{I}_0.$$

但是，从 III 得不到曲面上更多的不变量，因为 III 和 I，II 有密切的关系．我们有下面的定理：

定理 3 曲面上的三个基本形式满足关系式

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0. \tag{24}$$

证明 因为 $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},H,K$ 都是和曲面上保持定向的参数变换无关的（实际上，$\mathrm{III},K,\mathrm{I},H\cdot\mathrm{II}$ 在曲面改变定向时也不变），因此我们只要在每一点取一个特殊的参数系来验证即可．设 P 是曲面上任意一点，取点 P 附近的正交参数系 (u,v)，使得 u-曲线方向和 v-曲线方向在 P 点是彼此正交的主方向，于是在点 P 有 $F=M=0$，因而由（18）得到

$$-\boldsymbol{n}_u=\frac{L}{E}\boldsymbol{r}_u=\kappa_1\boldsymbol{r}_u,\quad -\boldsymbol{n}_v=\frac{N}{G}\boldsymbol{r}_v=\kappa_2\boldsymbol{r}_v.$$

所以

$$e=(\kappa_1)^2E,\qquad f=0,\quad g=(\kappa_2)^2G,$$

于是在 P 点有

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{II}=\kappa_1E\mathrm{d}u^2+\kappa_2G\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{III}=(\kappa_1)^2E\mathrm{d}u^2+(\kappa_2)^2G\mathrm{d}v^2.$$

因此

$$2H\,\mathrm{II}-K\,\mathrm{I}=(\kappa_1+\kappa_2)(\kappa_1E\mathrm{d}u^2+\kappa_2G\mathrm{d}v^2)-\kappa_1\kappa_2(E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2)$$

$$=(\kappa_1)^2E\mathrm{d}u^2+(\kappa_2)^2G\mathrm{d}v^2=\mathrm{III}.$$

证毕.

习　题

1. 求螺面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,u+v)$ 的 Gauss 曲率和平均曲率.

2. 设曲面 S 在一点的两两夹角为 $\frac{2\pi}{m}$ 的 m 个切向量所对应的法曲率为 $\kappa_n^{(1)}$, …, $\kappa_n^{(m)}$. 证明：当 $m>2$ 时有

$$H=\frac{1}{m}(\kappa_n^{(1)}+\cdots+\kappa_n^{(m)}).$$

3. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=(a(u+v),b(u-v),2uv)$ 的 Gauss 曲率，平均曲率 H，主曲率 κ_1，κ_2 及对应的主方向.

4. 设在曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的所有法线上截取长度为 λ 的一段，它的端点的轨迹构成一个管状面，其方程可以表为

$$\boldsymbol{r}(s,\theta)=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(\cos\theta\boldsymbol{\beta}(s)+\sin\theta\boldsymbol{\gamma}(s)),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 分别是曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的主法向量和次法向量. 求该曲面上各点的主曲率 κ_1,κ_2 及 Gauss 曲率和平均曲率.

5. 在曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上每一点沿法线方向截取长度为 λ 的一段（假定 λ 适当小），其端点的轨迹构成曲面

$$\boldsymbol{r}^*(u,v)=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{n}(u,v).$$

从点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 到点 $\boldsymbol{r}^*(u,v)$ 的对应记作 σ.

(1) 证明：两个曲面在对应点的切平面互相平行.

(2) 证明：σ 把曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的曲率线映为曲面 $\boldsymbol{r}^*(u,v)$ 上的曲率线.

(3) 在对应点的 Gauss 曲率和平均曲率有下列关系：

$$K^* = \frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K},$$

$$H^* = \frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}.$$

6. 证明：(1) $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{n}_u\cdot(\boldsymbol{r}_v\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{n}_u\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{n}) \\ -\boldsymbol{n}_v\cdot(\boldsymbol{r}_v\times\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{n}_v\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

§5 Dupin 标形和曲面在一点的标准展开

在这一节我们要对曲面在一点附近的形状作一个大致的分析．先从 Euler 公式的直观解释着手．

设曲面 S：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在点 P 有两个彼此正交的主方向单位向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，对应的主曲率分别设为 κ_1, κ_2．对于在点P的任意一个切向量

$$\boldsymbol{e}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2, \tag{1}$$

曲面的法曲率是（参看§3定理 3）

$$\kappa_n(\theta)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta. \tag{2}$$

自然，$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 构成曲面 S 在点 P 的切平面π上的直角坐标系．在方向 $\boldsymbol{e}$ 上，假定 $\kappa_n(\theta)\neq 0$，则在该方向的射线上可

以取一点 Q，使得

$$PQ=\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n(\theta)|}}. \tag{3}$$

在上述坐标系下，点 Q 的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{|\kappa_n(\theta)|}}\cos\theta, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{|\kappa_n(\theta)|}}\sin\theta. \end{cases} \tag{4}$$

根据 Euler 公式（2），点 Q 的坐标 x,y 所满足的方程是

$$\kappa_1x^2+\kappa_2y^2=\mathrm{sign}(\kappa_n(\theta)). \tag{5}$$

这是一条二次曲线．当 $K=\kappa_1\kappa_2>0$ 时，$\kappa_n(\theta)$ 与 κ_1，κ_2 同号，所以方程（5）成为

$$|\kappa_1|x^2+|\kappa_2|y^2=1, \tag{6}$$

这是一个椭圆（见图23（a））．当 $K=\kappa_1\kappa_2<0$ 时，方程（5）成为

$$|\kappa_1|x^2-|\kappa_2|y^2=\pm1, \tag{7}$$

这是两对彼此共轭的双曲线（见图23（b）），而曲面的渐近方向（即 $\kappa_n(\theta)=0$ 的方向）恰好是这两对双曲线的渐近线（其实这就是"渐近方向"的名称的由来）．若$K=\kappa_1\cdot\kappa_2=0$，但是 κ_1,κ_2 不全为零，不妨设 $\kappa_2\neq0$，则方程（5）成为

$$|\kappa_2|y^2=1,$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2|}}. \tag{8}$$

这是一对平行的直线，而 e_1 的方向为渐近方向（见图23（c））．当 $\kappa_1=\kappa_2=0$ 时，方程（5）的图形不存在．

我们把切平面 π 中在坐标系 $\{P;e_1,e_2\}$ 下，方程（5）的轨迹称为曲面在点 P 的 **Dupin 标形**．它可以看作曲面在 P 点

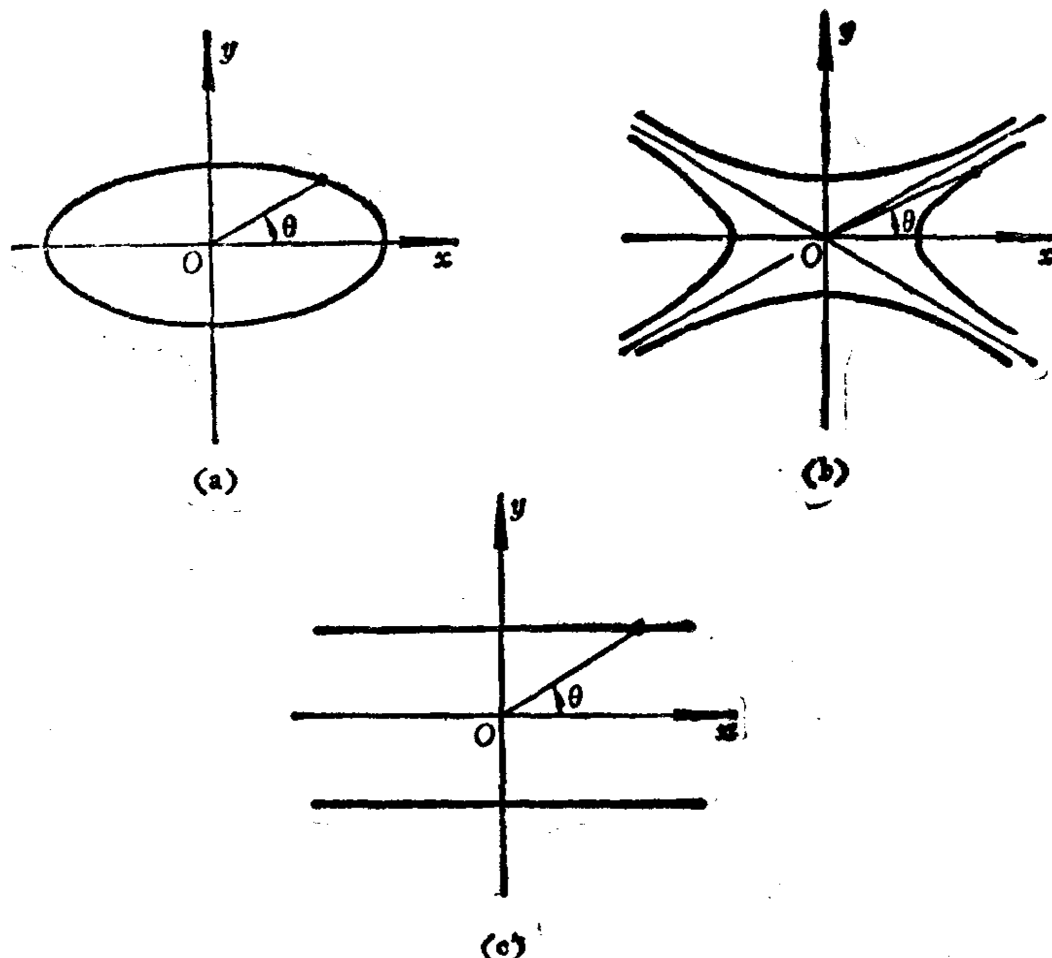


图 23

沿各个切方向的法曲率的一种直观表示．根据 Gauss 曲率 K 的符号的不同，Dupin 标形表现为不同类型的二次曲线．因此，我们把曲面上使 $K>0$ 的点称为**椭圆点**，使 $K<0$ 的点称为**双曲点**，把 $K=0$ 的点称为**抛物点**．椭圆点包括圆点在内，而在抛物点中包括了平点．

现在我们来观察曲面在一点附近的形状．设曲面 S 在点 P 有两个彼此正交的主方向单位向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，并且 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$．如 §3 习题 6 所述，在点 P 的一个邻域内可以取正交参数系 (u,v)，使得 $\boldsymbol{r}_u|_P=\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{r}_v|_P=\boldsymbol{e}_2$．于是在点 P 有

$$E=G=1,\qquad F=M=0,$$
$$\kappa_1=L,\qquad \kappa_2=M. \tag{9}$$

不妨设点 P 对应于参数值 $u=0, v=0$．根据 Taylor 展式，我们有

$$r(u,v)=r(0)+(r_u(0)u+r_v(0)v)+\frac{1}{2}(r_{uu}(0)u^2$$
$$+2r_{uv}(0)uv+r_{vv}(0)v^2)+o(u^2+v^2). \qquad (10)$$

但是

$$\begin{aligned} r_{uu}(0)\cdot n&=L=\kappa_1,\\ r_{uv}(0)\cdot n&=M=0,\\ r_{vv}(0)\cdot n&=N=\kappa_2, \end{aligned} \qquad (11)$$

于是（10）式成为

$$r(u,v)=r(0)+(u+o(\sqrt{u^2+v^2}))\ e_1+(v+o(\sqrt{u^2+v^2}))\ e_2$$
$$+\frac{1}{2}\ (\kappa_1u^2+\kappa_2v^2+o(u^2+v^2))n. \qquad (12)$$

如果把 $\{P;e_1,e_2,n\}$ 取作空间 E^3 的直角坐标系，那么曲面 S 的方程成为

$$\begin{aligned} x&=u+o(\sqrt{u^2+v^2}),\\ y&=v+o(\sqrt{u^2+v^2}),\\ z&=\frac{1}{2}(\kappa_1u^2+\kappa_2v^2)+o(u^2+v^2), \end{aligned}$$

或者

$$z=\frac{1}{2}\ (\kappa_1x^2+\kappa_2y^2)+o(x^2+y^2). \qquad (13)$$

上式称为曲面 S 在点 P 的标准展开．特别是，当 κ_1，κ_2 不全为零时，（13）式的主要部分是

$$z=\frac{1}{2}\ (\kappa_1x^2+\kappa_2y^2). \qquad (14)$$

这是一个二次曲面，称为曲面 S 在点 P 的近似曲面，记为S^*．容易验证，曲面 S^* 在点 P 以 e_1,e_2 为主方向，以 κ_1,κ_2 为主曲率，因而 S 与 S^* 在点 P 相切，并且沿每一个切方向的法曲率都相同．由此可见，近似曲面 S^* 可以看作曲面 S 在点 P 的模型．

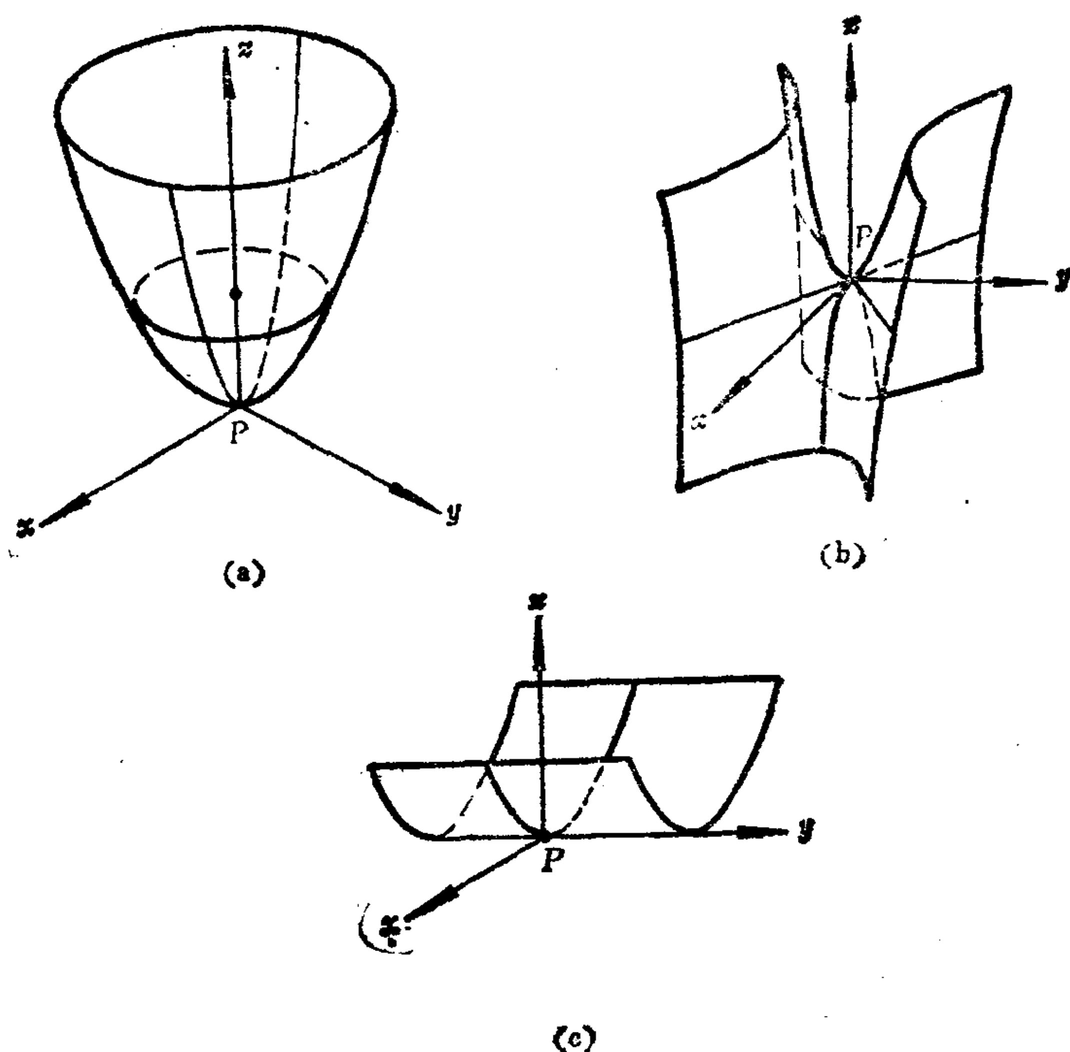


图 24

若 P 是椭圆点，$K=\kappa_1\kappa_2>0$，则（14）给出的是椭圆抛物面（见图24（a）），曲面 S 在点 P 的一个邻域落在切平面的一侧，即 S 在点 P 是凸的.

若 P 是双曲点，$K=\kappa_1\kappa_2<0$，则（14）给出的是双曲抛物面（见图24（b）），曲面 S 在点 P 的任意一个邻域都落在切平面的两侧，而且与切平面相交成在点 P 交叉的两条直线.

若 P 是非平点的抛物点，则（14）给出的是抛物柱面（见图24（c））.

观察 Dupin 标形的方程（5）和近似曲面 S^* 的方程（14）

不难发现：若用平面 $z=\pm\frac{1}{2}$去截近似曲面 S^*，则得曲线

$$\begin{cases}\kappa_1 x^2+\kappa_2 y^2=\pm 1,\\ z=\pm\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

将它投影到 S 在点 P 的切平面π上，所得的正是点P的 Dupin 标形.

前面的讨论可以归纳成下表：

点　型	Gauss 曲率	Dupin 标形		近似曲面	渐近方向
椭圆点	$K>0$	椭圆		椭圆抛物面	无
双曲点	$K<0$	共轭双曲线		双曲抛物面	两个
抛物点	$K=0$	非平点	平行直线对	抛物柱面	一个
		平点	无	无	不定

例1　设环面的方程是

$$\boldsymbol{r}=((a+r\cos u)\cos v,(a+r\cos u)\sin v,r\sin u),$$

其中 r,a 是常数，且 $0<r<a$. 考察环面上各种类型点的分布.

解　直接计算得到

$$E=r^2,\quad F=0,\quad G=(a+r\cos u)^2,$$

$$L=r,\quad M=0,\quad N=\cos u(a+r\cos u),$$

故

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\cos u}{r(a+r\cos u)}.$$

由此可见，K的符号由 $\cos u$ 的符号而定. 当 $u=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时，$K=0$，这些点是抛物点，分布在环面最上面和最下面的两个平行圆上. 当$\frac{\pi}{2}<u<\frac{3\pi}{2}$时，$K<0$，这些点是双曲点，分布在环面的内侧. 当$0\leqslant u<\frac{\pi}{2}$，或$\frac{3\pi}{2}<u\leqslant 2\pi$ 时，$K>0$，这些

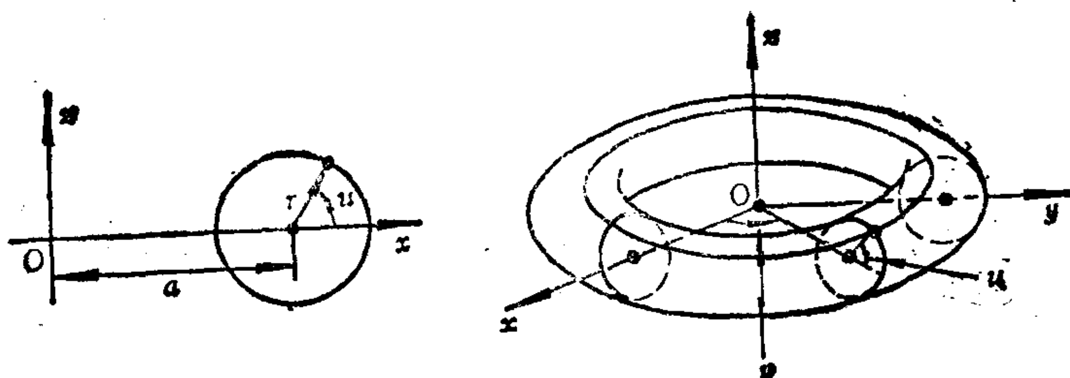


图 25

点是椭圆点，分布在环面的外侧（见图25）．

很明显，曲面上的椭圆点集和双曲点集都是开集，它们的边界点必是抛物点．

例 2 除了平点之外，我们都有近似曲面去模拟原曲面在该点邻近的形状．下面两个曲面上的平点都不构成开集：

（1）猴鞍面：$z=x^3-3xy^2$，原点是孤立的平点（图26(a)）．

（2）$z=x^2y^2$，平点分布在 x 轴和 y 轴上（图26(b)）．

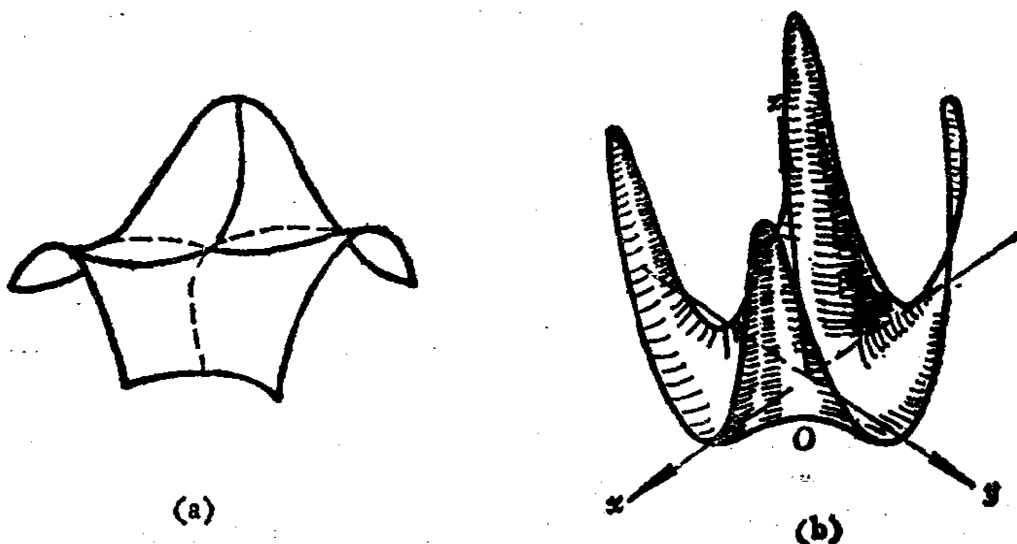


图 26

从图上可以看到，它们在平点的附近的形状是千姿百态的，在本课程中无法对于曲面在平点附近的形态进行分类研究．

习　题

1.　设旋转曲面的经线有水平切线，证明：这些切点都是曲面的抛物点.

2.　求曲面 $r=(u^3, v^3, u+v)$ 上的抛物点轨迹.

3.　研究§4的习题 4 中管状曲面上，各种类型点的分布.

4.　设 θ 是曲面上在一个双曲点的两个渐近方向的夹角. 证明：

(1) $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{-K}}{H}$，

(2) $$\cos\theta=\pm\frac{EN-2FM+GL}{\sqrt{(EN-GL)^2+4(EM-FL)(GM-FN)}},$$

其中 E，F，G，L，M，N 分别为曲面在该点的第一类、第二类基本量.

5.　求下列曲面在原点处的近似曲面：

(1) $z=\exp(x^2+y^2)-1$；

(2) $z=\ln\cos x-\ln\cos y$；

(3) $z=(x+3y)^3$.

6.　求曲面 $z=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的 Gauss 曲率，画出它的草图，并指出椭圆点和双曲点的区域.

7.　证明：如果曲面在一点有三个渐近方向，它们两两不共线，则该点必定是平点.

§6　某些特殊曲面

本节我们要讨论几个特殊曲面的例子，这些特殊曲面包括 Gauss 曲率是常数的曲面和平均曲率为零的曲面. 在第六章§4，我们将会证明：Gauss 曲率为常数 K 的曲面的第一基本形式有完全确定的表达式，因而任意两个有相同的常数 Gauss 曲率的曲

面必定是彼此局部保长对应的. 在本节我们首先要给出 Gauss 曲率为常数K的具体的例子，这类最简单的例子可以从旋转曲面中去找.

现在假定 S 是旋转面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, f(u)), \tag{1}$$
$$u\geqslant 0,\quad 0\leqslant v<2\pi,$$

并且它有常数 Gauss 曲率K.直接计算得到曲面 S 的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+f'^2(u))du^2+u^2dv^2. \tag{2}$$

为了保证 I 的正定性，我们只讨论 $u>0$ 的性质. 曲面的第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}du^2+\frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}dv^2. \tag{3}$$

因此，S 的 Gauss 曲率为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2}. \tag{4}$$

所以函数 $f(u)$ 应该满足常微分方程

$$f'(u)f''(u)=Ku(1+f'^2(u))^2. \tag{5}$$

积分得到

$$\frac{1}{1+f'^2(u)}=C-Ku^2, \tag{6}$$

其中 C 为常数，故

$$f(u)=\pm\int\sqrt{\frac{1-C+Ku^2}{C-Ku^2}}\,du. \tag{7}$$

如果 $K=0$，则

$$f(u)=Au+B, \tag{8}$$

其中 $A=\pm\sqrt{\frac{1-C}{C}}$. 所以，这时 S 为平面（$A=0$）或圆锥面（$A\neq 0$）.另一个 $K=0$ 的旋转面是圆柱面，它的方程是

$$\boldsymbol{r}(\rho,\theta)=(a\cos\theta,a\sin\theta,\rho), \tag{9}$$

它没有包括在方程（1）之中.

命 $K=\frac{1}{a^2}>0$（$a>0$），则

$$f(u)=\pm\int\sqrt{\frac{a^2(1-C)+u^2}{Ca^2-u^2}}\mathrm{d}u;$$

由此可见，C 必须取正值. 设 $C=b^2(b>0)$，则上式成为

$$f(u)=\pm\int\sqrt{\frac{a^2(1-b^2)+u^2}{a^2b^2-u^2}}\ \mathrm{d}u. \tag{10}$$

当 $b^2=1$ 时，

$$f(u)=\pm\int\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$=\mp\sqrt{a^2-u^2}+c_0, \tag{11}$$

它的图象是半径为 a 的半圆周，故所得的旋转面是半径为 a 的球面. 球面是 Gauss 曲率为正常数的曲面的典型例子.

上面的讨论告诉我们，非球面的正常曲率的曲面是存在的，只要取 $b^2>1$，或$0<b^2<1$，积分（10）式即可. 它们分别可以看成是将球面的南、北极处向里压一下，或向外抻一下的结果. 在大范围微分几何学中可以证明，整个球面必定有刚硬性，也就是它要保持第一基本形式不变是不可能变形的. 将来我们会证明，Gauss 曲率为常数的曲面有确定的第一基本形式，因此整个球面要保持 Gauss 曲率不变也是不可变形的. 但是，我们现在研究的旋转面去掉了 $u=0$ 的点，即去掉了球面上的南、北两极，故这种变形是可能的. 为了实现去掉南、北两极的球面作保持 Gauss 曲率 $K=\text{const}$ 的变形，其实只要取 b 为参数 t 的函数 $b=b(t)$，使得 $b(0)=1$，那么将 $b(t)$代入（10）式，用相应的 $f_t(u)$构造的旋转面族就是球面的保持 Gauss 曲率的变形.

命 $K=-\frac{1}{a^2}<0(a>0)$，则

$$f(u)=\pm\int\sqrt{\frac{a^2(1-C)-u^2}{Ca^2+u^2}}\mathrm{d}u,$$

由此可见必须有 $C<1$. 命 $C=1-b^2(b>0)$，则上式成为

$$f(u)=\pm\int\sqrt{\frac{a^2b^2-u^2}{a^2(1-b^2)+u^2}}\mathrm{d}u. \tag{12}$$

设 $b^2=1$，则

$$f(u)=\pm\int\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\mathrm{d}u. \tag{13}$$

作变量替换 $u=a\cos\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f=\mp\int a\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pm a[\ln(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)-\sin\varphi],\quad 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

在 YOZ 平面上，上面的 f 给出的曲线是

$$\begin{cases}y=a\cos\varphi,\\ z=\pm a[\ln(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)-\sin\varphi],\quad 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2},\end{cases} \tag{14}$$

这是两条曳物线构成的曲线，在 $y=a$, $z=0$ 处有一个尖点，y 轴是它在尖点的切线，z 轴是它的渐近线．把曳物线绕 z 轴旋转所得的曲面称为伪球面（图27），它的方程是

$$r(\varphi,\theta)=(a\cos\varphi\cos\theta,a\cos\varphi\sin\theta,\\ \pm a[\ln(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)-\sin\varphi]),$$

$$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta<2\pi. \tag{15}$$

伪球面是有负常数 Gauss 曲率的曲面的典型例子．

当$0<b^2<1$或 $b^2>1$ 时，将（12）式积分便给出其它的有负

常数 Gauss 曲率的旋转面的例子，其图形如图28所示。

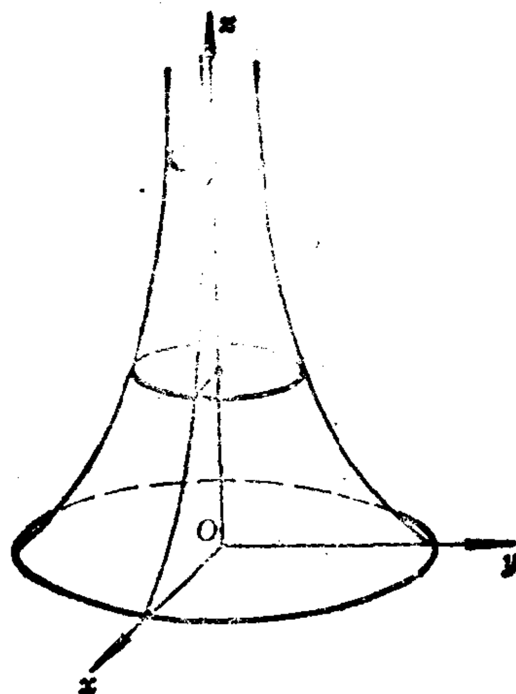


图 27

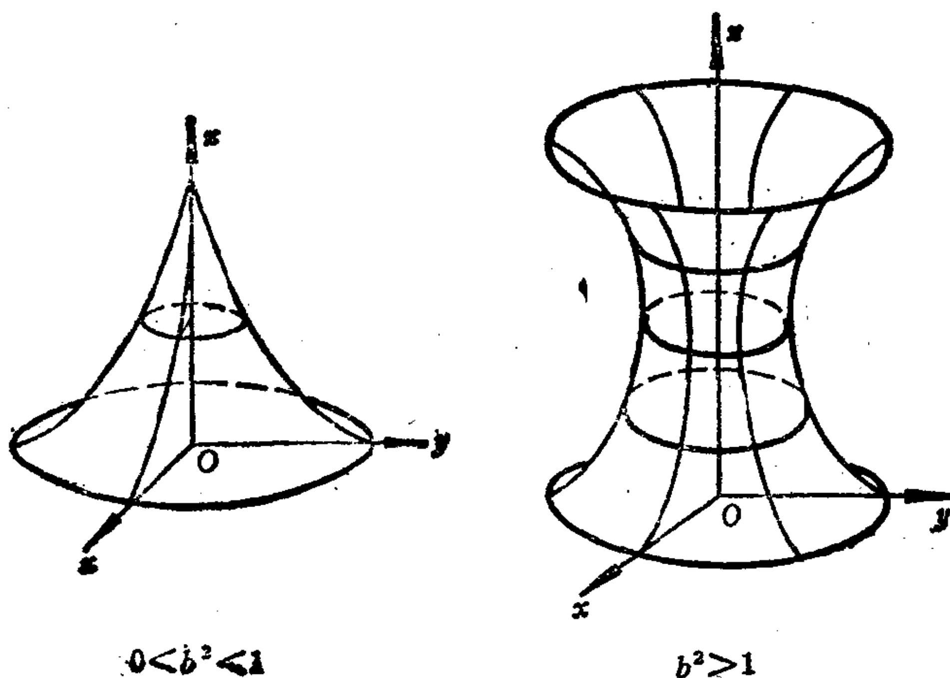


图 28

平均曲率 $H\equiv 0$ 的曲面称为**极小曲面**。极小曲面是微分几何研究工作的一个大题目，尤其是最近二、三十年来，极小曲面的

研究成果非常丰富，对它提出了各种各样的问题，而且许多问题陆续得到了完满的解答．要了解极小曲面方面的成果的读者可以阅读一本写得非常出色的书：

R. Osserman, A Servey of Minimal Surfaces, 2-nd ed., Dover, New York, 1986.

利用变分法可以证明：以曲线 C 为边界的曲面 S 如果在所有这样的曲面中达到面积的最小值，则 S 必定是极小曲面．我们在这里只满足于给出极小曲面的一些例子，讨论一些十分明显的性质．

首先我们来看看有哪些极小旋转曲面．设曲面 S 的方程如(1)式给出，由(2)，(3)两式可知曲面 S 的平均曲率是

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{f''(u)}{(\sqrt{1+f'^2(u)})^3}+\frac{f'(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}\right)$$

$$=\frac{uf''(u)+f'(u)(1+f'^2(u))}{2(\sqrt{1+f'^2(u)})^3}.$$

由此可见，如果 S 是极小曲面，则函数 $f(u)$ 必须满足微分方程

$$uf''(u)+f'(u)(1+f'^2(u))=0. \tag{16}$$

积分得到

$$\frac{f'^2(u)}{1+f'^2(u)}=\frac{C}{u^2},$$

其中常数 C 必须 $\geqslant 0$. 若 $C=0$，则 $f'(u)=0$，$f(u)=\text{const}$. 所得到的旋转面是一个平面．假定 $C=a^2$，$a>0$，则

$$f'(u)=\pm\frac{a}{\sqrt{u^2-a^2}},$$

$$f(u)=\pm\int\frac{a\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\pm a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}). \tag{17}$$

所以，极小旋转曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\pm a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})), \tag{18}$$

这个方程可以改写为

$$r(\rho,\theta)=\left(a\mathrm{ch}\frac{\rho}{a}\cos\theta, a\mathrm{ch}\frac{\rho}{a}\sin\theta, \rho\right). \qquad (19)$$

曲线（17）是一条悬链线，它绕着 z 轴旋转所产生的面称为悬链面，它恰好就是旋转曲面中的极小曲面（见图29）。

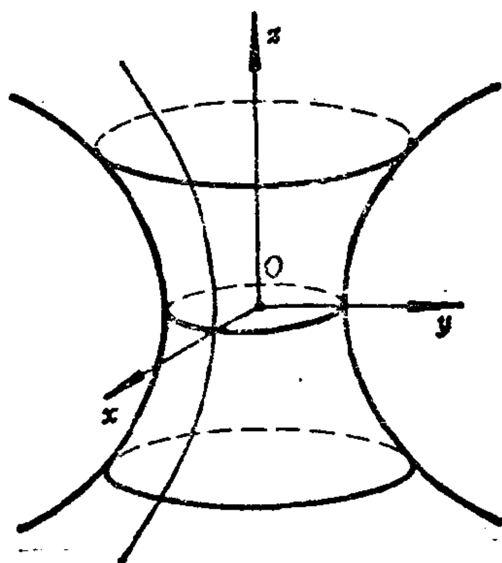


图 29

根据定义，$H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$，所以在极小曲面上两个主曲率的绝对值相同、符号相反，因此 $K=\kappa_1\kappa_2=-(\kappa_1)^2\leqslant 0$，即极小曲面上没有椭圆点，只有平点或双曲点．另外，根据 Euler 公式，极小曲面在双曲点的渐近方向是彼此正交的．这是因为渐近方向与主曲率 κ_1 的对应主方向所成的角 θ 满足方程

$$\begin{aligned}0&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\\&=\kappa_1(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\kappa_1\cos 2\theta,\end{aligned}$$

而2θ恰好是两个渐近方向之间的夹角，故 $2\theta=90°$，得证．

平均曲率为非零常数的曲面也是很有意思的．球面和圆柱面是两类这样的曲面．近来关于平均曲率为常数的曲面有很多研究，但是找出非球面和圆柱面的具体例子是比较困难的，在这里不多赘言了．

习　题

1．证明：$z=c\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$是极小曲面．并求它的主曲率．

2．假定一个极小曲面的方程可以写成 $z=f(x)+g(y)$的形状．证明：除了一个附加的任意常数外，它必定是

$$z=\frac{1}{a}\ln\frac{\cos ay}{\cos ax},$$

其中 a 是常数．此曲面称为 Scherk 曲面．

3．证明：

$$\boldsymbol{r}=(3u(1+v^2)-u^3,3v(1+u^2)-v^3,3(u^2-v^2))$$

是极小曲面．它称为 Ennerper 曲面．证明它的曲率线是平面曲线，并求曲率线所在平面．

4．证明：正螺面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,\ bv)$ 是极小曲面．并证明：除了平面之外，直纹极小曲面都是正螺面．

5．证明：如果 Gauss 映射是曲面到单位球面的保角对应，则该曲面或者是球面，或者是极小曲面．

6．求伪球面（见方程（15））的全面积．(由结果可知：伪球面尽管向无穷远处延伸，但是它的全面积是有限的)

第五章　曲面论基本定理

§1　自然标架的运动公式

在前面两章，我们定义了曲面的第一、第二基本形式，并且根据这两个基本形式对曲面在一点附近的形状进行了分析．两个基本形式Ⅰ、Ⅱ与曲面的保持定向不变的参数变换是无关的，与 E^3 中直角坐标变换是无关的，因而也与曲面在 E^3 中的刚体运动也是无关的．总之，Ⅰ和Ⅱ是曲面的两个不变式．一个自然的问题是：这两个基本形式是否足以确定曲面的形状？即Ⅰ和Ⅱ是否构成曲面的完全不变量系统？我们在本章对此要给出肯定的回答．

在研究空间曲线时，我们在曲线上曲率不等于零的每一个点附以一个确定的 Frenet 标架，它可以从曲线的参数方程通过求导运算自然地用显式表示出来，从而我们把曲线转化成标架空间中的一个单参数族．曲线论的基本定理和存在定理实际上是对于标架空间中的这个单参数族来进行证明的．对于曲面我们也作同样的考虑．差别在于我们所考虑的是曲面上的自然标架 $\{r;r_u,r_v,n\}$，它们依赖于曲面上参数的选取，而且不是单位正交标架．若要考虑曲面上内在确定的正交标架场，我们可以考虑 $\{r;e_1,e_2,n\}$，其中 e_1,e_2 是曲面的主方向单位向量．但是，主方向并不能象 Frenet 标架那样从曲面的方程 $r=r(u,v)$ 出发直截了当地用显式表示出来．而且即使我们取了正交曲率线网作为参数曲线网，也只能做到 $r_u /\!/ e_1,r_v /\!/ e_2$，并不能使 $r_u=e_1,r_v=e_2$．因此，我们从自然标架出发展开我们的理论比较方便．当然在引进外微分的概念之后，我们就能够利用曲面上任意的标架场了（这种标架场的选

择有相当大的任意性，与曲面的参数不必有紧密的联系），特别是正交标架场. 这将是第七章的内容.

由于我们要做的是多元函数的微商，会出现许多和式，因此把曲面上的有关的量的记号作适当的改变是比较方便的. 首先，我们把 u^1, u^2 作为曲面的参数，这样曲面的方程成为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2). \tag{1}$$

命

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}(u^1,u^2)}{\partial u^\alpha}\text{①}. \tag{2}$$

在本书，我们规定指标 $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta$ 等希腊字母的取值为 1，2. 所以

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}. \tag{3}$$

这样，函数 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$的微分是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)\mathrm{d}u^\alpha=\boldsymbol{r}_\alpha\mathrm{d}u^\alpha, \tag{4}$$

在最后一式中我们采用了 Einstein 的和式约定，也就是：在一个单项中，如果同一个指标 α 作为上指标和下指标各出现一次，则该式表示是对于 $\alpha=1,2$ 的求和式. 多对重复指标表示多重的和式. 例如

$$S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta},$$

$$P_{\alpha\beta}{}^{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{2}P_{\alpha\beta}{}^{\alpha}=P_{1\beta}{}^{1}+P_{2\beta}{}^{2}$$

等等. 注意，求和指标的字母本身并没有实质意义，它可以用别的字母代替，例如

$$S_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=S_{\xi\eta}T^{\xi\eta}.$$

---

① 注意：在第三章§5，我们也用了记号 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$，但是在那里的意义是指两个不同的曲面. 这里的$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$代表两个切向量；在本书以下部分我们总是采用这个意义.

但是作为求和指标的字母出现三次以上是没有意义的，例如$P_{\alpha\alpha}{}^{\alpha}$的写法是不适当的；如果要表示这样的和式必须用和号表示成$\sum_{\alpha=1}^{2} P_{\alpha\alpha}{}^{\alpha}=P_{11}{}^{1}+P_{22}{}^{2}$，而不能用 Einstein 和式约定．在表示多重和式时，Einstein 和式约定起到十分重要的简化作用．

我们用 $g_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta}$ 表示曲面 S 的第一类基本量和第二类基本量，即

$$
\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_{\beta},\\
&b_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}_{\beta}=-\boldsymbol{r}_{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_{\alpha},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}}\right)$．这样，曲面的两个基本形式是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}&=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta},\\
\mathrm{II}&=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

另外，记

$$
g=\det(g_{\alpha\beta}),\qquad b=\det(b_{\alpha\beta}).\tag{7}
$$

因为矩阵$(g_{\alpha\beta})$是正定的，记它的逆矩阵为$(g^{\alpha\beta})$，因此

$$
g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}=\begin{cases}1, & \alpha=\gamma,\\ 0, & \alpha\neq\gamma.\end{cases}\tag{8}
$$

实际上，

$$
\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}.\tag{9}
$$

采用上述记号，曲面上的自然标架就成为$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$．要考虑的是自然标架场的运动公式．首先，标架原点的微商根据定义为

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}}=\boldsymbol{r}_{\alpha}.\tag{10}
$$

另外，既然 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 是线性无关的，不妨假定

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\gamma}+C_{\alpha\beta}\boldsymbol{n},\\[2ex]
\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\beta}}=D^{\gamma}{}_{\beta}\boldsymbol{r}_{\gamma}+D_{\beta}\boldsymbol{n},
\end{cases}\tag{11}
$$

其中 $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$，$C_{\alpha\beta}$，$D^{\gamma}_{\beta}$，$D_{\beta}$ 都是待定系数．

用 $\boldsymbol{n}$ 和（11）的第一式两边作内积，得到

$$C_{\alpha\beta}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}\cdot \boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot \boldsymbol{n}=b_{\alpha\beta}, \tag{12}$$

故系数 $C_{\alpha\beta}$ 恰是曲面的第二类基本量 $b_{\alpha\beta}$. 用 $\boldsymbol{r}_{\xi}$ 与（11）的第二式两边作内积，则得

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\beta}}\cdot \boldsymbol{r}_{\xi}=D^{\gamma}_{\beta}\,\boldsymbol{r}_{\gamma}\cdot \boldsymbol{r}_{\xi},$$

所以

$$\begin{aligned} D^{\gamma}_{\beta}\,g_{\gamma\xi}&=-b_{\beta\xi}, \\ D^{\gamma}_{\beta}&=-b_{\beta\xi}g^{\xi\gamma}. \end{aligned} \tag{13}$$

下面我们引进用第一类基本量($g_{\alpha\beta}$) 将一组带指标的量的上指标或下指标下降或上升的概念．命

$$b_{\beta}{}^{\gamma}=b_{\beta\xi}g^{\xi\gamma}, \tag{14}$$

把 $b_{\beta}{}^{\gamma}$ 看成是将 $b_{\beta\gamma}$ 的指标 γ 借助于（$g^{\alpha\beta}$）上升的结果．这个过程是可逆的，即

$$b_{\beta\gamma}=b_{\beta}{}^{\xi}g_{\xi\gamma},$$

故 $b_{\beta\gamma}$ 恰是将 $b_{\beta}{}^{\gamma}$ 的指标借助于（$g_{\alpha\beta}$）下降的结果．（$b_{\beta}{}^{\gamma}$）这组量与（$b_{\beta\gamma}$）是彼此决定的．这样，所求的系数是

$$D^{\gamma}_{\beta}=-b_{\beta}{}^{\gamma}. \tag{15}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量场，故从（11）式得到 $D_{\beta}=0$. 综上所述，（11）式成为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{r}_{\gamma}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^{\beta}}=-\,b_{\beta}{}^{\gamma}\boldsymbol{r}_{\gamma}. \end{cases} \tag{16}$$

现在我们来求 $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$.

在（16）的第一式两边点乘 $\boldsymbol{r}_{\xi}$，则得

$$r_{\alpha\beta}\cdot r_{\xi}=\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi}.$$

记

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi}=\Gamma_{\xi\alpha\beta},\tag{17}$$

则我们有

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta},\tag{18}$$

并且前面的式子成为

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta}=r_{\alpha\beta}\cdot r_{\xi}.\tag{19}$$

注意到 $r_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}=r_{\beta\alpha}$，故 $\Gamma_{\xi\alpha\beta}$，$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ 关于指标 α，β 是对称的．对于 $g_{\alpha\beta}=r_\alpha\cdot r_\beta$ 求微商得到

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=r_{\alpha\gamma}\cdot r_\beta+r_\alpha\cdot r_{\beta\gamma},$$

用（19）式代入得到

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=\Gamma_{\beta\alpha\gamma}+\Gamma_{\alpha\beta\gamma}.\tag{20}$$

将指标调换，我们有

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\gamma\beta}+\Gamma_{\gamma\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha}=\Gamma_{\gamma\beta\alpha}+\Gamma_{\beta\gamma\alpha},$$

将上面两式相加再减去（20）式，则得

$$2\Gamma_{\gamma\alpha\beta}=\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma},$$

或

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right). \tag{21}$$

因此

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\xi\beta}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}}\right). \tag{22}$$

由此可见，$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ 是由曲面的第一类基本量及其一阶偏导数决定的. 我们把 (22) 式定义的 $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ 称为 Christoffel 记号.

(10) 和 (16) 两式合起来称为曲面上**自然标架的运动公式**. 通常把 (16) 的第一式称为 **Gauss 公式**，把第二式称为 **Weingarten公式**. 实际上，与第四章 § 4的 (17) 式对照可知，后者恰好是 Weingarten 映射的公式，即 $(b_{\beta}{}^{\gamma})$ 是 Weingarten映射在自然基底$\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$下的矩阵. 从这些公式可以看出自然标架沿参数曲线的运动是由曲面的第一类基本量和第二类基本量完全确定的. 要记住，$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$的几何意义是向量 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$ 用自然标架分解时在切向量 $\boldsymbol{r}_{\gamma}$ 上的分量，而 $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$ 是向量 $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$ 在切向量 $\boldsymbol{r}_{\gamma}$ 上的投影. 因此，在求 $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ 时，可以根据定义从曲面的第一类基本量计算出来，也可以根据曲面的参数方程进行计算.

恢复用第一类基本量的原来记号，则 Christoffel 记号是:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{111}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \Gamma_{112}=\Gamma_{121}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\\
&\Gamma_{122}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \Gamma_{211}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\\
&\Gamma_{212}=\Gamma_{221}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \Gamma_{222}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},
\end{aligned} \tag{23}$$

以及

$$\Gamma^1{}_{11}=\frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial u}\right),$$

$$\Gamma^1{}_{12}=\Gamma^1{}_{21}=\frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

$$\Gamma^1{}_{22}=\frac{1}{EG-F^2}\left(G\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{G}{2}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right),\tag{24}$$

$$\Gamma^2{}_{11}=\frac{1}{EG-F^2}\left(-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u}-\frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+E\frac{\partial F}{\partial u}\right),$$

$$\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\frac{1}{EG-F^2}\left(-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

$$\Gamma^2{}_{22}=\frac{1}{EG-F^2}\left(-F\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right).$$

如果取正交参数曲网，则 $F\equiv 0$，上面的公式便大大化简了：

$$\Gamma^1{}_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial u},\Gamma^1{}_{12}=\Gamma^1{}_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial v},\Gamma^1{}_{22}=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\Gamma^2{}_{11}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial u},\Gamma^2{}_{22}=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial v}.\tag{25}$$

例 求曲面 $z=f(x,y)$的 Christoffel 记号.

解 因为已经给出了曲面方程，我们用运动公式（16）出发直接求 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$. 曲面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),$$

因此 x,y 分别对应于 u^1,u^2. $\Gamma^1{}_{11}$ 就是 $\boldsymbol{r}_{xx}$ 在 $\boldsymbol{r}_x$ 上的分量，Γ^2_{11} 就是 $\boldsymbol{r}_{xx}$ 在 $\boldsymbol{r}_y$ 上的分量，如此等等. 显然，

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),$$
$$\boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y),$$
$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),$$
$$\boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),$$

$$r_{yy}=(0,0,f_{yy}).$$

因此

$$g_{11}=1+f_x^2,\quad g_{12}=f_xf_y,\quad g_{22}=1+f_y^2,$$

$$g=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2=1+f_x^2+f_y^2,$$

$$g^{11}=\frac{1+f_y^2}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$g^{12}=-\frac{f_xf_y}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$g^{22}=\frac{1+f_x^2}{1+f_x^2+f_y^2}.$$

$$\Gamma_{111}=r_{xx}\cdot r_x=f_xf_{xx},$$

$$\Gamma_{112}=\Gamma_{121}=r_{xy}\cdot r_x=f_xf_{xy},$$

$$\Gamma_{122}=r_{yy}\cdot r_x=f_xf_{yy},$$

$$\Gamma_{211}=r_{xx}\cdot r_y=f_yf_{xx},$$

$$\Gamma_{212}=\Gamma_{221}=r_{xy}\cdot r_y=f_yf_{xy},$$

$$\Gamma_{222}=r_{yy}\cdot r_y=f_yf_{yy},$$

因此

$$\Gamma^1{}_{11}=g^{11}\Gamma_{111}+g^{12}\Gamma_{211}=\frac{f_xf_{xx}}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$\Gamma^1{}_{12}=g^{11}\Gamma_{112}+g^{12}\Gamma_{212}=\frac{f_xf_{xy}}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$\Gamma^1{}_{22}=g^{11}\Gamma_{122}+g^{12}\Gamma_{222}=\frac{f_xf_{yy}}{1+f_x^2+f_y^2},$$

同理得到

$$\Gamma^2{}_{11}=\frac{f_yf_{xx}}{1+f_x^2+f_y^2},\quad \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\frac{f_yf_{xy}}{1+f_x^2+f_y^2},$$

$$\Gamma^2{}_{22}=\frac{f_yf_{yy}}{1+f_x^2+f_y^2}.$$

习　题

1．设有参数变换 $u^\alpha=u^\alpha(u^{1'},u^{2'})$，命 $a^\alpha_{\alpha'}=\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}$，假定 $\det(a^\alpha_{\alpha'})>0$. 证明：

$$g_{\alpha'\beta'}=g_{\alpha\beta}a^\alpha_{\alpha'}a^\beta_{\beta'},$$
$$b_{\alpha'\beta'}=b_{\alpha\beta}a^\alpha_{\alpha'}a^\beta_{\beta'}.$$

2．证明：在上题的参数变换下，$(g_{\alpha\beta})$的逆矩阵$(g^{\alpha\beta})$的变换规律是

$$g^{\alpha\beta}=g^{\alpha'\beta'}a^\alpha_{\alpha'}a^\beta_{\beta'}.$$

3．如果用$\Gamma^{\gamma'}{}_{\alpha'\beta'}$记关于$(g_{\alpha'\beta'})$的 Christoffel 记号，证明：在习题 1 的参数变换下有变换规律

$$\Gamma^{\gamma'}{}_{\alpha'\beta'}=\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}a^\alpha_{\alpha'}a^\beta_{\beta'}a^{\gamma'}_\gamma+\frac{\partial a^\gamma_{\alpha'}}{\partial u^{\beta'}}a^{\gamma'}_\gamma,$$

其中$(a^{\alpha'}_\alpha)$是$(a^\alpha_{\alpha'})$的逆矩阵，即$a^{\alpha'}_\alpha=\dfrac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}$.

4．验证：曲面的平均曲率 H 可以表示成

$$H=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta},$$

并且 H 在习题 1 的参数变换下是不变的。

5．证明下列恒等式：

(1) $g^{\gamma\xi}\Gamma^\beta{}_{\xi\alpha}+g^{\beta\xi}\Gamma^\gamma{}_{\xi\alpha}=-\dfrac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha}$.

(2) $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\dfrac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}=g_{\beta\xi}\Gamma^\xi{}_{\alpha\gamma}-g_{\gamma\xi}\Gamma^\xi{}_{\alpha\beta}$.

(3) $\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\ln g}{\partial u^\alpha}$，其中$g=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2$.

§2 曲面的唯一性定理

利用上一节关于曲面上的自然标架场的运动公式，不难直接证明曲面的形状是由它的第一基本形式和第二基本形式唯一地确定的。这个结论确切地叙述如下：

定理1 设 S_1, S_2 是定义在同一个参数区域 $D\subset E^2$ 上的两个正则参数曲面，若在每一点 $(u^1, u^2)\in D$，曲面 S_1 和 S_2 有相同的第一基本形式和第二基本形式，则曲面 S_1 和 S_2 在 E^3 的一个刚体运动下是彼此重合的。

证明 因为在 S_1, S_2 上采取了同一组参数，因此在每一点 $(u^1, u^2)\in D$，曲面 S_1、S_2 有相同的第一基本形式和第二基本形式的意思是它们在对应点有相同的第一类基本量和第二类基本量。这些基本量在曲面作刚体运动时是不变的。取定一点 $(u_0^1, u_0^2)\in D$，假定 S_i 的自然标架场是 $\{\boldsymbol{r}^{(i)}; \boldsymbol{r}_1^{(i)}, \boldsymbol{r}_2^{(i)}, \boldsymbol{n}^{(i)}\}$，$i=1,2$。由假设可知，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_\alpha^{(1)}(u_0)\cdot\boldsymbol{r}_\beta^{(1)}(u_0)=\boldsymbol{r}_\alpha^{(2)}(u_0)\cdot\boldsymbol{r}_\beta^{(2)}(u_0)=g_{\alpha\beta}(u_0),\\
&\boldsymbol{r}_\alpha^{(1)}(u_0)\cdot\boldsymbol{n}^{(1)}(u_0)=\boldsymbol{r}_\alpha^{(2)}(u_0)\cdot\boldsymbol{n}^{(2)}(u_0)=0,\\
&\boldsymbol{n}^{(1)}(u_0)\cdot\boldsymbol{n}^{(1)}(u_0)=\boldsymbol{n}^{(2)}(u_0)\cdot\boldsymbol{n}^{(2)}(u_0)=1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

并且 $\{\boldsymbol{r}^{(i)}(u_0); \boldsymbol{r}_1^{(i)}(u_0), \boldsymbol{r}_2^{(i)}(u_0), \boldsymbol{n}^{(i)}(u_0)\}$ 都是右手系；这就是说，这两个标架具有相同的度量系数和定向，因而在 E^3 中存在一个刚体运动 σ 把标架 $\{\boldsymbol{r}^{(2)}(u_0); \boldsymbol{r}_1^{(2)}(u_0), \boldsymbol{r}_2^{(2)}(u_0), \boldsymbol{n}^{(2)}(u_0)\}$ 变为标架 $\{\boldsymbol{r}^{(1)}(u_0); \boldsymbol{r}_1^{(1)}(u_0), \boldsymbol{r}_2^{(1)}(u_0), \boldsymbol{n}^{(1)}(u_0)\}$。用 $\sigma(S_2)$ 表示曲面 S_2 在刚体运动 σ 作用下所得到的新曲面，那么它与 S_1 在 $u=u_0$ 处有相同的自然标架，而且在对应点有相同的第一类基本量和第二类基本量，所以它们的自然标架场处处适合同一组偏微分方程。不妨设 $\sigma(S_2)$ 仍记作 S_2。现在我们要证 S_1 和 S_2 的自然标架场处处重合，因而曲面 S_1 与 S_2 是重合的。

命

$$\begin{cases} f_{\alpha\beta}(u)=(\boldsymbol{r}_\alpha^{(1)}-\boldsymbol{r}_\alpha^{(2)})\cdot(\boldsymbol{r}_\beta^{(1)}-\boldsymbol{r}_\beta^{(2)}), \\ f_\alpha(u)=(\boldsymbol{r}_\alpha^{(1)}-\boldsymbol{r}_\alpha^{(2)})\cdot(\boldsymbol{n}^{(1)}-\boldsymbol{n}^{(2)}), \\ f(u)=(\boldsymbol{n}^{(1)}-\boldsymbol{n}^{(2)})^2, \end{cases} \tag{2}$$

因此，在 $u=u_0$ 时成立

$$f_{\alpha\beta}(u_0)=0, \quad f_\alpha(u_0)=0, \quad f(u_0)=0. \tag{3}$$

另外，根据自然标架的运动公式，经过直接计算得到函数 $f_{\alpha\beta}$，f_α，f满足下列线性齐次一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=\Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha}f_{\delta\beta}+\Gamma^\delta{}_{\gamma\beta}f_{\alpha\delta}+b_{\gamma\alpha}f_\beta+b_{\gamma\beta}f_\alpha, \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma}=-b_\gamma{}^\delta f_{\delta\alpha}+\Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha}f_\delta+b_{\gamma\alpha}f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^\gamma}=-2b_\gamma{}^\alpha f_\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

很明显，$f_{\alpha\beta}\equiv0$，$f_\alpha\equiv0$，$f\equiv0$是方程组（4）的、满足初条件（3）的解. 根据一阶偏微分方程组在已知初条件下的解的唯一性得知

$$f_{\alpha\beta}(u)\equiv0, \quad f_\alpha(u)\equiv0, \quad f(u)\equiv0. \tag{5}$$

这说明

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_\alpha^{(1)}(u)\equiv\boldsymbol{r}_\alpha^{(2)}(u), \\ \boldsymbol{n}^{(1)}(u)\equiv\boldsymbol{n}^{(2)}(u). \end{cases} \tag{6}$$

再命

$$h(u)=(\boldsymbol{r}^{(1)}(u)-\boldsymbol{r}^{(2)}(u))^2, \tag{7}$$

则

$$\frac{\partial h}{\partial u^\gamma}=2(\boldsymbol{r}^{(1)}(u)-\boldsymbol{r}^{(2)}(u))\cdot(\boldsymbol{r}_\gamma^{(1)}(u)-\boldsymbol{r}_\gamma^{(2)}(u))=0,$$

故

$$h(u)\equiv h(u_0)=0, \tag{8}$$

即

$$\boldsymbol{r}^{(1)}(u)\equiv\boldsymbol{r}^{(2)}(u),$$

这说明曲面 S_1 与 S_2 是重合的.

上述定理称为曲面的唯一性定理，在理论上是十分重要的. 我们在以后还会给出它的一些应用.

曲面唯一性定理还能叙述成如下的形式，它是上面的定理以及第三章 §5的定理 1 的直接推论：

定理2 设 $S_i(i=1,2)$是 E^3 中的两块正则曲面，其第一基本形式和第二基本形式分别为 $\mathrm{I}_i, \mathrm{II}_i$. 若有光滑映射 $\sigma: S_2 \to S_1$，使得 $\sigma^* \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$，$\sigma^* \mathrm{II}_1 = \mathrm{II}_2$，则在 E^3 中必存在一个刚体运动 $\tilde{\sigma}$，使得 $\sigma = \tilde{\sigma}|_{S_2}$.

习　题

1. 推导函数 $f_{\alpha\beta}(u)$，$f_\alpha(u)$，$f(u)$所满足的方程组（4）.
2. 已知函数 $f_{\alpha\beta}(u)$，$f_\alpha(u)$，$f(u)$满足方程组（4）. 命

$$F(u) \equiv g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} f_{\alpha\beta} f_{\gamma\delta} + 2 g^{\alpha\gamma} f_\alpha f_\gamma + f^2,$$

证明：$\dfrac{\partial F(u)}{\partial u^\xi} = 0$.

§3　曲面论基本方程

现在我们着手考虑曲面的存在性问题. 具体一点说，如果在参数区域D上给定两个二次微分形式$\varphi = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$，$\psi = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$，其中 $\alpha, \beta = 1,2$，$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$，$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$，并且$\varphi$是正定的，则是否存在一个参数曲面 $f: D \to E^3$，使得它的第一基本形式和第二基本形式分别是已知的微分形式φ和ψ? 这个问题比较复杂，需要作比较深入的分析. 首先我们会看到，曲面上的第一基本形式和第二基本形式之间是有一定联系的，并不是彼此独立的；它们适合一定的相容性条件，此即本节要讨论的基本方程. 接着我们要证明，这些条件正好是曲面存在的充分条件.

已知曲面S 的方程是$r = r(u^1, u^2)$，它的两个基本形式是：

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \\ \mathrm{II} &= b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

那么曲面S上的自然标架场$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$的运动公式是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \boldsymbol{r}_\alpha, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{n}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta} = -b_\beta^\gamma \boldsymbol{r}_\gamma, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right). \tag{3}$$

由于假定曲面方程有三次以上的连续可微性，所以$\boldsymbol{r}_\alpha$，$\boldsymbol{n}$的两次偏微商是连续的，并且与它们求偏微商的次序无关，即

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}. \tag{4}$$

用（2）式代入，则得

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\delta + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{n}) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} \boldsymbol{r}_\delta + b_{\alpha\gamma} \boldsymbol{n}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} (b_\beta{}^\delta \boldsymbol{r}_\delta) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (b_\gamma{}^\delta \boldsymbol{r}_\delta). \tag{6}$$

将（5）式展开，并且再用（2）式代入，整理之后得到

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial u^\beta} \Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^\eta{}_{\alpha\beta} \Gamma^\delta{}_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\delta{}_{\eta\beta} - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\delta \right. \\ &\left. + b_{\alpha\gamma} b_\beta{}^\delta \right) \boldsymbol{r}_\delta + \left(\Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} b_{\delta\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} b_{\delta\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) \boldsymbol{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$是处处线性无关的，所以上式的系数必须为零，

即有

$$\frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\beta}$$

$$= b_{\alpha\beta}b^{\delta}_{\gamma} - b_{\alpha\gamma}b^{\delta}_{\beta}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} = b_{\beta\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} - b_{\gamma\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

注意到（7）式左边是由第一类基本量 $g_{\alpha\beta}$ 的不高于 2 阶的偏导数所构成的量，将它记成

$$R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\beta}, \tag{9}$$

称之为第一类基本量的 **Riemann 符号**. 为方便起见，把 $R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}$ 的指标 δ 下降所得的量记作 $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$，即

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\eta}R^{\eta}{}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{10}$$

自然就有

$$R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\delta\eta}R_{\eta\alpha\beta\gamma}.$$

于是，方程（7）可以改写成

$$R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b_{\gamma}{}^{\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta}{}^{\delta}, \tag{11}$$

或者

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -(b_{\delta\beta}b_{\alpha\gamma} - b_{\delta\gamma}b_{\alpha\beta}). \tag{12}$$

上述方程称为曲面的 **Gauss 方程**. 同样，方程(8)称为**Codazzi 方程**. 很明显，Gauss-Codazzi 方程是曲面的第一类基本量和第二类基本量必须满足的相容条件.

要指出的是，从方程（6）得不到新的相容条件. 实际上，将（6）式展开后得到

$$\frac{\partial b_{\beta}{}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\gamma}{}^{\delta}}{\partial u^{\beta}} = -b_{\beta}{}^{\eta}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\gamma} + b_{\gamma}{}^{\eta}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\beta}. \tag{13}$$

容易验证，（13）和（8）两式是等价的.

Gauss-Codazzi 方程看上去是很复杂的，但是实质上在方程

(12) 中只包含一个方程，在 (8) 中包含两个方程．首先要指出，Riemann 符号 $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ 有一些重要的对称性质．实际上，由 $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ 的定义得到

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\delta\eta}\left(\frac{\partial\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\eta}{}_{\xi\gamma}-\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\eta}{}_{\xi\beta}\right)$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\gamma}}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}$$

$$+\frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\beta}}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}+\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\eta\xi\gamma}-\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\delta\xi\beta}$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma_{\eta\delta\beta}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma_{\eta\delta\gamma}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}.$$

最右端的前两项用 Christoffel 记号的表达式代入，直接得到

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\gamma}}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\delta}\partial u^{\beta}}-\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}\partial u^{\gamma}}\right)\tag{14}$$

$$+\Gamma_{\eta\delta\beta}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma_{\eta\delta\gamma}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}.$$

从 (14) 式很容易看出

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\delta\alpha}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\gamma\beta}.\tag{15}$$

很明显，(12) 式的右端也具有 (15) 式所给出的对称性质，所以在本质上 (12) 式只包含一个方程，即

$$R_{1212}=-[b_{11}b_{22}-(b_{12})^2],\tag{16}$$

或

$$b_{11}b_{22}-(b_{12})^2=-R_{1212}.$$

在 (8) 式中，若 β,γ 取相同的值则成为平凡的恒等式；于是，有意义的方程只有两个：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=-b_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{11}+b_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{12},\\[2ex]\dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=-b_{2\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{21}+b_{1\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{22}.\end{cases}\tag{17}$$

要强调指出的是，Gauss 方程 (16) 及 Codazzi 方程 (17)

等价于二次偏微商与次序无关的条件（4）．换句话说，如果给定了二次微分形式$\varphi=g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$，$\psi=b_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$，其中$\varphi$和$\psi$适合本节开头所叙述的对称条件和正定条件，那么我们可以构造一阶偏微分方程组(2)，其中$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$都看作是记成向量形式的未知函数．如果（$g_{\alpha\beta}$）和（$b_{\alpha\beta}$）满足 Gauss-Codazzi 方程（16），（17），则

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}=\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\alpha}},\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\gamma}}=\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_{\alpha}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\beta}},$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{n}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\gamma}}=\frac{\partial^2\boldsymbol{n}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\beta}}$$

都是方程组（2）的推论．根据一阶偏微分方程组的解的存在性定理（参看附录§2），方程组（2）是可积的．在这里可以领略到曲面论与曲线论的本质区别：在曲线论的情形，曲率和挠率可以是弧长参数的任意函数（只要求曲率函数为正的）；而在曲面论的情形，Ⅰ和Ⅱ是彼此关联的，即在E^3中具有已知第一基本形式的曲面不能随意地作弯曲变形，这便导致开创微分几何新纪元的著名的 Gauss 定理．在§5我们要专门讨论这个问题．

在特殊的参数系下，Riemann 符号R_{1212}以及 Codazzi 方程(17)便化简成便于记忆和应用的形式．我们采用第一类基本量、第二类基本量的原来的记号．首先，在正交参数系下，因为$F=0$，并且$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$有简单的表达式(参看§1（25）式)，因此

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2E}{(\partial v)^2}+\frac{\partial^2G}{(\partial u)^2}\right)+\Gamma_{\eta11}\Gamma^{\eta}_{22}-\Gamma_{\eta12}\Gamma^{\eta}_{12}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)-\frac{1}{4E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{4G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{4G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{4E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial u},$$

即
$$R_{1212}=\sqrt{EG}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}.\qquad(18)$$

进一步，若在曲面上取正交的曲率线网作为参数曲线网，于是 $F=M=0$，因此由（17）式得到

$$\frac{\partial L}{\partial v}=-N\Gamma^2_{11}+L\Gamma^1_{12}=\frac{N}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{L}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}=H\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\frac{\partial N}{\partial u}=N\Gamma^2_{21}-L\Gamma^1_{22}=\frac{N}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{L}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}=H\frac{\partial G}{\partial u}.$$

所以，这时 Codazzi 方程成为

$$\frac{\partial L}{\partial v}=H\frac{\partial E}{\partial v},\qquad \frac{\partial N}{\partial u}=H\frac{\partial G}{\partial u},\tag{19}$$

其中$H=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}+\frac{L}{E}\right)$是曲面的平均曲率.（18）和（19）两式比较容易记忆，但是要注意它们所适用的参数系.

习　题

1. 验证方程（13）和（8）的等价性.

2. 证明：若 (u,v) 是曲面上的参数系，使得参数曲线网是正交的曲率线网，则主曲率 κ_1,κ_2 满足下列方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \kappa_1}{\partial v}=\dfrac{1}{2}\dfrac{E_v}{E}(\kappa_2-\kappa_1),\\[2ex] \dfrac{\partial \kappa_2}{\partial u}=\dfrac{1}{2}\dfrac{G_u}{G}(\kappa_2-\kappa_1).\end{cases}$$

3. 证明：平均曲率为常数的曲面或是平面，或是球面，或是它的第一基本形式和第二基本形式可以表示成

$$\mathrm{I}=\lambda[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2],$$

$$\mathrm{II}=(1+\lambda H)(\mathrm{d}u)^2-(1-\lambda H)(\mathrm{d}v)^2.$$

4. 设 S 是 E^3 中的一块曲面，它的主曲率是两个不相等的常值函数. 证明：S 是圆柱面的一部分.

5. 已知曲面的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=u^2((\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2),$$

$$\text{II}=A(u,v)(\mathrm{d}u)^2+B(u,v)(\mathrm{d}v)^2.$$

证明：(1) $A\cdot B\equiv 1$； (2) A 和 B 只是 u 的函数.

§4 曲面的存在性定理

本节要证明，Gauss-Codazzi 方程也是曲面存在的充分条件.

设 $D\subset E^2$是一个区域，$\varphi=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$，$\psi=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$ 是定义在D内的两个二次微分形式，其中 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$，$b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$，且 $(g_{\alpha\beta})$ 是正定的. 用 $(g^{\alpha\beta})$ 表示 $(g_{\alpha\beta})$ 的逆矩阵. 利用 $g_{\alpha\beta}$ 及其导数可以构造如下的量：

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right),\tag{1}$$

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\delta}\Gamma_{\delta\alpha\beta},\tag{2}$$

$$R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial\Gamma^\delta{}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}+\Gamma^\eta{}_{\alpha\beta}\Gamma^\delta{}_{\eta\gamma}-\Gamma^\eta{}_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta{}_{\eta\beta},\tag{3}$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\delta\eta}R^\eta{}_{\alpha\beta\gamma}.\tag{4}$$

定理1 如果上面所给出的二次微分形式φ，ψ满足下列方程：

$$\begin{cases}b_{11}b_{22}-(b_{12})^2=-R_{1212},\\ \dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=-b_{2\gamma}\Gamma^\gamma_{11}+b_{1\gamma}\Gamma^\gamma_{12},\\ \dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=-b_{2\gamma}\Gamma^\gamma_{21}+b_{1\gamma}\Gamma^\gamma_{22},\end{cases}\tag{5}$$

则在任意一点 $(u_0^1,u_0^2)\in D$，必有它的一个邻域 $U\subset D$，以及定义在D上的正则参数曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2):U\to E^3$，使得$\varphi$和$\psi$分别为该曲面的第一基本形式和第二基本形式，并且 E^3 中任意两块这样的曲面必定在 E^3的一个刚体运动下是彼此重合的.

证明 此定理的唯一性部分正是§2所证明的曲面的唯一性

定理，因此我们只要证明曲面的存在性．利用φ，ψ的系数$g_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$及其导数，可以列出如下的一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \boldsymbol{r}_\alpha, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\gamma + b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta} = -b^\gamma_\beta \boldsymbol{r}_\gamma, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 都看作写成向量形式的未知函数（因而一共有12个未知函数），自变量是u^1，u^2．利用标架空间的语言，求曲面的问题实际上化为 E^3 中依赖两个参数的标架族的存在问题，要求该标架族满足上面的运动方程．根据一阶偏微分方程组的理论，方程组（6）有解的充分必要条件是

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta},$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$$

是方程组（6）的推论．在§3我们已经指出，上述条件与 Gauss-Codazzi 方程（5）是等价的，因此在定理所假定的条件下方程组（6）是可积的．换言之，对于任意给定的一点$(u^1_0,u^2_0)\in D$，以及任意给定的初值$\boldsymbol{r}^0$，$\boldsymbol{r}^0_\alpha$，$\boldsymbol{n}^0$，必有(u^1_0,u^2_0)的邻域$U\subset D$，和定义在U上的函数

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2), \\ \boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha(u^1, u^2), \\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u^1, u^2) \end{cases} \tag{7}$$

满足方程组（6）以及初条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{r}^0, \\ \boldsymbol{r}_\alpha(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{r}_\alpha^0, \\ \boldsymbol{n}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{n}^0. \end{cases} \tag{8}$$

现在，我们要求初值 $\boldsymbol{r}^0$，$\boldsymbol{r}_\alpha^0$，$\boldsymbol{n}^0$ 满足以下条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_\alpha^0\cdot\boldsymbol{r}_\beta^0=g_{\alpha\beta}(u_0^1,u_0^2), \\ \boldsymbol{r}_\alpha^0\cdot\boldsymbol{n}^0=0, \\ \boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{n}^0=1, \\ (\boldsymbol{r}_1^0,\boldsymbol{r}_2^0,\boldsymbol{n}^0)>0. \end{cases} \tag{9}$$

可以证明：此时，方程组（6）在初条件(8)下的解 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 给出了我们所要求的曲面．为此，考虑函数

$$\begin{cases} f_{\alpha\beta}(u^1,u^2)=\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{r}_\beta(u^1,u^2)-g_{\alpha\beta}(u^1,u^2), \\ f_\alpha(u^1,u^2)=\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{n}(u^1,u^2), \\ f(u^1,u^2)=\boldsymbol{n}(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{n}(u^1,u^2)-1. \end{cases} \tag{10}$$

由条件（8)，(9）可知函数 $f_{\alpha\beta}$，f_α，f 满足初条件：

$$f_{\alpha\beta}(u_0^1,u_0^2)=f_\alpha(u_0^1,u_0^2)=f(u_0^1,u_0^2)=0. \tag{11}$$

由于函数 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$ 满足方程组（6），故直接微分得到函数 $f_{\alpha\beta}$，f_α，f 满足线性齐次一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=\Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma}f_{\delta\beta}+\Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}f_{\delta\alpha}+b_{\gamma\alpha}f_\beta+b_{\gamma\beta}f_\alpha, \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma}=-b_\gamma^\delta f_{\delta\alpha}+\Gamma_{\gamma\alpha}^\delta f_\delta+b_{\gamma\alpha}f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^\gamma}=-2b_\gamma^\alpha f_\alpha. \end{cases} \tag{12}$$

与§2的定理 1 的证明相对照，上面的方程组(12)和初条件（11）与§2的方程组（4）和初条件（3）是相同的，因此只能有

$$f_{\alpha\beta}(u^1,u^2)\equiv0,$$

$$f_\alpha(u^1,u^2)\equiv 0,$$
$$f(u^1,u^2)\equiv 0,$$

即在U上成立

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{r}_\beta(u^1,u^2)=g_{\alpha\beta}(u^1,u^2), \\ \boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{n}(u^1,u^2)=0, \\ \boldsymbol{n}(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{n}(u^1,u^2)=1. \end{cases} \tag{13}$$

这说明

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})^2=\det(g_{\alpha\beta})>0, \tag{14}$$

即 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 是处处线性无关的. 由解的连续性以及条件（9）可知 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})>0$, 所以 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$成右手系, 并且 $\boldsymbol{r}_\alpha\perp\boldsymbol{n}$, 因此 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2/|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|$.

从函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 满足方程组（6）的第一式可知, 若把 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$看作 E^3 中的一块曲面, 则$\boldsymbol{r}_1(u^1,u^2)$, $\boldsymbol{r}_2(u^1,u^2)$是该曲面的参数曲线的切向量; 因为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 线性无关（见(14) 式), 故$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$是正则曲面片, 并且 $\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$ 恰是该曲面的单位法向量场. 由（13）的第一式可知, φ是该曲面的第一基本形式; 由(6)的第二式可知, ψ是该曲面的第二基本形式. 证毕.

从曲面的存在性定理的证明可以看出, 把曲面看作一族标架的观念是十分重要和基本的. 在第七章, 我们要对 E^3 中的标架族作更加细致的研究; 在那里, 曲面的存在性定理成为标架族存在性定理的一个特例.

推论 两个二次微分形式 $\varphi=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$ 和 $\psi=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$（其中$\varphi$是正定的）能够作为 E^3 中一个正则曲面的第一基本形式和第二基本形式的充分必要条件是系数 $g_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$ 满足 Gauss-Codazzi 方程（5）.

习　题

1. 验证函数 $f_{\alpha\beta}(u^1,u^2)$, $f_\alpha(u^1,u^2)$, $f(u^1,u^2)$（定义见(10)式)满足方程组（12）.

2. 判断下面给出的二次微分形式φ，ψ能否作为E^3中一块曲面的第一基本形式和第二基本形式？说明理由.

(1) $\varphi = du^2 + dv^2$, $\psi = du^2 - dv^2$;

(2) $\varphi = du^2 + \cos^2 u dv^2$, $\psi = \cos^2 u du^2 + dv^2$.

3. 求曲面，使它的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I} = (1+u^2)du^2 + u^2 dv^2,$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(du^2 + u^2 dv^2).$$

4. 已知

$$\varphi = E(u,v)du^2 + G(u,v)dv^2,$$

$$\psi = \lambda(u,v)\cdot\varphi,$$

其中 $E>0$，$G>0$. 若φ，ψ能够作为曲面的第一基本形式和第二基本形式，则函数 E,G,λ 应该满足什么条件？

假定 $E=G$，写出满足上述条件的E,G,λ 的具体表达式.

§5 Gauss 定 理

在 Gauss 方程中蕴含着一个十分精采的结果. 在§3已经导出：

$$b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = -R_{1212}, \tag{1}$$

其中 R_{1212} 是用 $g_{\alpha\beta}$ 的一阶、二阶偏导数所构造的量. 将 (1) 式两边分别除以 $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$，则得

$$K = \frac{b}{g} = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \tag{2}$$

我们知道，Gauss 曲率 $K = \dfrac{b}{g}$是曲面的两个主曲率 κ_1,κ_2 的乘积，而 κ_1,κ_2 是由曲面S 在空间 E^3 中的形状确定. 但是，(2) 式说明，κ_1 与 κ_2 的乘积是由曲面S的第一基本形式决定的，而与曲面S在 E^3 中的保长变形（即保持第一基本形式的弯

曲变形）是无关的．这就是 Gauss 的 Egregium 定理：

定理 1 曲面的 Gauss 曲率是曲面在保长变换下的不变量.

Gauss 的这个定理是微分几何学的里程碑，开创了微分几何学的一个新的纪元．正是 Gauss 的这一伟大发现启发我们对于抽象的曲面进行研究，也就是对于只给定第一基本形式的曲面研究其几何性质．Gauss 定理说明，曲面的度量性质本身蕴含着一定的弯曲性质，这是曲线所不具有的特点．例如球面一定不会保持长度不变而摊成一块平面，反过来平面无论如何不可能保持长度不变而弯成一个球面，因为球面和平面的 Gauss 曲率是不同的．专门研究曲面上由第一基本形式决定的几何学称为内蕴几何学，它在高维的推广就是现在所称的 Riemann 几何学．在下一章我们还要研究曲面的更多的内蕴性质．

§3的（18）式告诉我们，当曲面上取正交参数曲线网 (u,v) 时，$F\equiv0$，并且

$$R_{1212}=\sqrt{EG}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\},$$

所以由（2）式得到

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}. \tag{3}$$

特别是，若在曲面上取等温参数系，则曲面的第一基本形式成为 $\mathrm{I}=\lambda^2(du^2+dv^2)$，于是曲面的Gauss 曲率是

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda. \tag{4}$$

在第三章我们已经知道可展曲面可以与平面建立保长对应，所以由 Gauss 定理得知可展曲面的 Gauss 曲率恒等于零（这个事实也能从可展曲面上的直母线是曲率线的性质导出）．反过来，这个条件也是充分的．

定理 2 E^3中一块曲面是可展曲面，当且仅当它的 Gauss 曲率恒等于零.

证明 必要性已证，现在只要证明充分性成立. 设曲面S的Gauss 曲率$K\equiv 0$. 若S上处处是脐点，则S是由平点组成的，故S是一块平面. 假定S上没有脐点，则可取正交曲率线网为参数曲线网，于是$F=M=0$,

$$K=\frac{LN}{EG}=0.$$

不妨假定 v-曲线对应的主曲率为零，于是$N\equiv 0$，$L\neq 0$. 由 Codazzi 方程可知

$$H\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial N}{\partial u}=0,$$

即

$$\frac{\partial G}{\partial u}=0. \tag{5}$$

我们首先要证曲面上的每一条 v-曲线是直线，因而S是直纹面. 为此只要证明 v-曲线的切方向不变，即 $r_{vv}\times r_v\equiv 0$. 由自然标架的运动公式可知

$$\begin{aligned}r_{vv}&=\Gamma^1{}_{22}r_u+\Gamma^2{}_{22}r_v+Nn\\&=\Gamma^1{}_{22}r_u+\Gamma^2{}_{22}r_v,\\r_{vv}\times r_v&=\Gamma^1{}_{22}r_u\times r_v.\end{aligned}\tag{6}$$

但是由（5）式可知

$$\Gamma^1{}_{22}=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\equiv 0,$$

故

$$r_{vv}\times r_v\equiv 0 \tag{7}$$

得证. 现在要证曲面的单位法向量 n 沿 v-曲线是不变的. 实际上，我们有

$$n_v\cdot r_u=-M=0,$$

$$n_v\cdot r_v=-N=0,$$

$$n_v\cdot n=0,$$

因此

$$n_v \equiv 0,$$

所以 S 是可展曲面.

推论 曲面 S 是可展曲面，当且仅当它可以与平面建立保长对应.

证明 在第三章已证可展曲面与平面可以建立保长对应. 现在假定曲面 S 与平面可以建立保长对应，于是由 Gauss 定理可知曲面 S 的 Gauss 曲率恒等于零，因而由定理 2 得知 S 是一个可展曲面.

上面的推论同时说明，Gauss 曲率恒为零的两块曲面是彼此成保长对应的. 在下一章我们还要证明：任意两块有相同常数 Gauss 曲率的曲面必可以建立保长对应. 但是一般说来，在某一对应下 Gauss 曲率相等的两块曲面不是总可以建立保长对应的，下面的例子说明了这个问题. 然而在确有保长对应的情形，Gauss 定理能给出如何去找这个对应的信息.

例 已知曲面 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\left(au,bv,\dfrac{1}{2}(au^2+bv^2)\right)$，$\bar{S}$ 的方程是 $\boldsymbol{r}=\left(\bar{a}\bar{u},\bar{b}\bar{v},\dfrac{1}{2}(\bar{a}\bar{u}^2+\bar{b}\bar{v}^2)\right)$，并且 $ab=\bar{a}\bar{b}$.

则在对应 $\bar{u}=u$，$\bar{v}=v$ 下曲面 S 和 $\bar{S}$ 有相同的 Gauss 曲率，但是当 $(a^2,b^2)\neq(\bar{a}^2,\bar{b}^2)$ 及 $(\bar{b}^2,\bar{a}^2)$ 时，曲面 S 和 $\bar{S}$ 之间不存在保长对应.

解 直接计算得到，曲面 S 的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=a^2(1+u^2)du^2+2abuv\,du\,dv+b^2(1+v^2)dv^2,$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\frac{a}{\sqrt{1+u^2+v^2}}du^2+\frac{b}{\sqrt{1+u^2+v^2}}dv^2,$$

所以 S 的 Gauss 曲率为

$$K=\frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}. \tag{8}$$

$\bar{S}$ 和 S 的方程是同一个形式，所以 $\bar{S}$ 的Gauss 曲率为

$$\bar{K}=\frac{1}{\overline{ab}(1+\bar{u}^2+\bar{v}^2)^2}, \tag{9}$$

所以当$ab=\overline{ab}$时，在对应 $\bar{u}=u$，$\bar{v}=v$下，曲面 S 和$\bar{S}$ 的 Gauss 曲率相等.

如果在曲面 S 和 $\bar{S}$之间存在保长对应

$$\bar{u}=\bar{u}(u,v),\quad \bar{v}=\bar{v}(u,v), \tag{10}$$

则由（8），（9）及 Gauss 定理得到

$$\bar{u}^2+\bar{v}^2=u^2+v^2, \tag{11}$$

于是（u,v）=(0,0) 与（$\bar{u},\bar{v}$)=(0,0) 相对应. 将（11）式对 u,v 求两次偏导数，然后在（u,v)=(0,0) 处求值得到：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2=1,\\[2ex] \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}+\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}=0,\\[2ex] \left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2=1.\end{cases}$$

由此可见，矩阵

$$J=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(0,0)}$$

是一个正交矩阵，不妨设

$$J=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\varepsilon\sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $\varepsilon=\pm1$. 由于（10）是保长对应，故有

$$J\begin{pmatrix}\bar{a}^2(1+\bar{u}^2) & \overline{abuv} \\ \overline{abuv} & \bar{b}^2(1+\bar{v}^2)\end{pmatrix}J'=\begin{pmatrix}a^2(1+u^2) & abuv \\ abuv & b^2(1+v^2)\end{pmatrix}.$$

命 $(u,v)=(0,0)$，并用（12）式代入得到

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\varepsilon\sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}^2 & 0 \\ 0 & \bar{b}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2 & 0 \\ 0 & b^2\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\bar{a}^2\cos^2\theta+\bar{b}^2\sin^2\theta=a^2, \\ \bar{a}^2\sin^2\theta+\bar{b}^2\cos^2\theta=b^2, \\ (\bar{b}^2-\bar{a}^2)\sin\theta\cos\theta=0.\end{cases}$$

由此得到，或者有

$$\bar{a}^2=\bar{b}^2=a^2=b^2,$$

或者有 $\bar{a}^2-\bar{b}^2\neq0$，而 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$，即

$$(a^2,b^2)=(\bar{a}^2,\bar{b}^2)\text{ 或 }(\bar{b}^2,\bar{a}^2).$$

这与假设是矛盾的. 因此在 $(a^2,b^2)\neq(\bar{a}^2,\bar{b}^2)$ 及 $(\bar{b}^2,\bar{a}^2)$ 的假设下，曲面 S 和 $\bar{S}$ 之间是不可能有保长对应的.

作为本章的一个小结，我们要证明一个重要的定理，它说明在一般情形，曲面的法曲率的确包含了曲面形状的全部信息.

定理 3 设 $\sigma: S_1\to S_2$ 是从曲面 S_1 到 S_2 的可微映射，其中 S_1 上没有脐点，且其 Gauss 曲率 K 不为零. 若 σ 保持在每一点沿每一个切方向的法曲率不变，则有 E^3 中的一个刚体运动 $\tilde{\sigma}$，使得 $\sigma=\tilde{\sigma}|_{S_1}$.

证明 因为在曲面 S_1 上没有脐点，故在 S_1 上可取正交曲率线网为参数曲线网，于是 S_1 的两个基本形式为

$$\mathrm{I}_1 = E du^2 + G dv^2,$$
$$\mathrm{II}_1 = L du^2 + N dv^2,$$

并且

$$L = \kappa_1 E, \qquad N = \kappa_2 G, \qquad \kappa_1 > \kappa_2, \qquad K = \kappa_1 \kappa_2 \neq 0.$$

由于σ保持在每一点沿每一个切方向的法曲率不变，故切映射σ_*必处处非退化，于是(u,v)可作为S_2上的参数，使得σ是曲面S_1、S_2上有相同参数值的点之间的对应．不妨设S_2的两个基本形式分别为

$$\mathrm{I}_2 = \bar{E}\, du^2 + 2\bar{F} du dv + \bar{G}\, dv^2,$$
$$\mathrm{II}_2 = \bar{L} du^2 + 2\bar{M} du dv + \bar{N} dv^2.$$

注意到σ保持法曲率不变，故曲面S_2沿u-曲线方向的法曲率是κ_1，沿v-曲线方向的法曲率是κ_2，并且它们同样是曲面S_2在一点沿各个切方向的法曲率的最大值和最小值．这说明，u-曲线和v-曲线仍是曲面S_2上彼此正交的曲率线网，故有

$$\bar{F} = \bar{M} = 0, \quad \bar{L} = \kappa_1 \bar{E}, \qquad \bar{N} = \kappa_2 \bar{G}.$$

这样，σ保持法曲率不变的条件成为

$$\frac{\kappa_1 \bar{E}\, du^2 + \kappa_2 \bar{G} dv^2}{\bar{E} du^2 + \bar{G}\, dv^2} = \frac{\kappa_1 E du^2 + \kappa_2 G dv^2}{E du^2 + G dv^2} \tag{13}$$

展开后得到

$$(\kappa_1 - \kappa_2)(\bar{E}G - E\bar{G}) du^2 dv^2 = 0.$$

由于$\kappa_1 - \kappa_2 > 0$，且上式是关于du, dv的恒等式，故有

$$\bar{E}G - E\bar{G} = 0.$$

设

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{\bar{G}}{G} = \lambda. \tag{14}$$

于是

$$\mathrm{I}_2 = \lambda \cdot \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{II}_2 = \lambda \cdot \mathrm{II}_1. \tag{15}$$

我们要证明$\lambda = 1$．由§3的（19）式，曲面S_1，S_2的Codazzi方程分别为

$$\frac{\partial L}{\partial v}=H\frac{\partial E}{\partial v},\qquad \frac{\partial N}{\partial u}=H\frac{\partial G}{\partial u},\tag{16}$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial v}=H\frac{\partial \bar{E}}{\partial v},\qquad \frac{\partial \bar{N}}{\partial u}=H\frac{\partial \bar{G}}{\partial u},\tag{17}$$

其中 $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$. 注 意 到 $\bar{E}=\lambda E$, $\bar{G}=\lambda G$, $\bar{L}=\lambda L$, $\bar{N}=\lambda N$, 将（17）式展开，并用（16）式代入得到

$$(\kappa_1-\kappa_2)\frac{\partial\lambda}{\partial u}=(\kappa_1-\kappa_2)\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,$$

故有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,$$

即 λ 是常数. 又由（3）式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\},$$

注意到 $\bar{E}=\lambda E$, $\bar{G}=\lambda G$, 故

$$\bar{K}=\frac{1}{\lambda}K.$$

但是另一方面

$$K=\bar{K}=\kappa_1\kappa_2\neq 0,$$

故得

$$\lambda\equiv 1,$$

于是曲面 S_1和 S_2 有相同的第一基本形式和第二基本形式. 根据§2 的定理 2 得到，在 E^3 中存在一个刚体运动$\tilde{\sigma}$，使得$\sigma=\tilde{\sigma}|_{S_1}$，定理证毕.

习　　题

1. 已知曲面的第一基本形式如下所示，求它们的 Gauss 曲率.

(1) $\mathrm{I}=\dfrac{du^2+dv^2}{\left[1+\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)\right]^2}$， c 是常数.

(2) $\mathrm{I}=\dfrac{a^2(du^2+dv^2)}{v^2}$， $v>0$，a 是常数.

(3) $\mathrm{I}=\dfrac{du^2+dv^2}{u^2+v^2+c}$， $c>0$是常数.

(4) $\mathrm{I}=du^2+e^{-\frac{2u}{a}}dv^2$， a 是常数.

(5) $\mathrm{I}=du^2+\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}dv^2$， a是常数.

2． 证明在下列曲面之间不存在等距对应：

(1) 球面； (2) 柱面； (3) 双曲抛物面 $z=x^2-y^2$.

3． 设曲面 S和 $\bar{S}$ 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=du^2+(1+u^2)dv^2,$$

$$\bar{\mathrm{I}}=\frac{\bar{u}^2}{\bar{u}^2-1}d\bar{u}^2+\bar{u}^2dv^2,$$

试问：在 S 与 $\bar{S}$之间是否存在保长对应？

4． 设曲面 S 和$\bar{S}$ 的方程分别为$\boldsymbol{r}=(u\cos v, u\sin v, \ln u)$和$\boldsymbol{r}=(\bar{u}\cos v, \bar{u}\sin\bar{v}, \bar{v})$. 证明：在 $\bar{v}=u, \bar{v}=v$ 的对应下 曲 面 S 和 $\bar{S}$ 有相同的 Gauss 曲率，但是在 S 与 $\bar{S}$之间不存在保长对应.

5． 设曲面 S 和$\bar{S}$ 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=e^{2v}[du^2+a^2(1+u^2)dv^2],$$

$$\bar{\mathrm{I}}=e^{2\bar{v}}[d\bar{u}^2+b^2(1+\bar{u}^2)d\bar{v}^2],$$

其中 $a^2\neq b^2$. 证明：在对应$\bar{u}=u$，$\bar{v}=v$下这两个曲面有相同的 Gauss 曲率，但是该对应不是保长对应.

6． 证明：曲面在一般的参数系 (u,v) 下，Gauss曲率有下面的表达式：

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} -\frac{G_{uu}}{2}+F_{uv}-\frac{E_{vv}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2} \\ F_v-\frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

7. 若在定理 3 中 S_1 的 Gauss 曲率 $K\equiv 0$，则定理的结论是否成立？举例说明。

第六章　测地曲率和测地线

在这一章我们要研究曲面上更多的内蕴性质，特别是研究曲面上的曲线的测地曲率以及测地线等概念，它们也是在曲面的保长变换下不变的.

§1　测地曲率和测地挠率

设曲面 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$C$ 是 S 上的一条曲线，其方程是 $u^\alpha=u^\alpha(s)$，其中 s 是曲线的弧长参数. C 作为空间 E^3 中的曲线的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1(s),u^2(s)), \tag{1}$$

在第二章我们已经建立了沿曲线 C 定义的 Frenet 标架场 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$. 注意到在空间曲线 C 的 Frenet 标架并没有顾及曲线 C 落在曲面 S 上的事实，因此 Frenet 标架的运动公式（即 Frenet 公式）自然不会反映曲线 C 和曲面 S 之间的关系. 现在我们要建立沿曲线 C 定义的正交标架场，使它兼顾曲线 C 和曲面 S. 将这个标架场记作 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$（见图30），使得

$$\boldsymbol{e}_1(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\alpha}(s), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}_3(s)=\boldsymbol{n}(s), \tag{3}$$

因而

$$\boldsymbol{e}_2(s)=\boldsymbol{e}_3(s)\times\boldsymbol{e}_1(s)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}(s). \tag{4}$$

从直观上看，$\boldsymbol{e}_2(s)$ 就是将曲线的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{e}_1(s)$ 围绕曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 按正向转过90°所得到的向量. 与第二章 §7 在平面

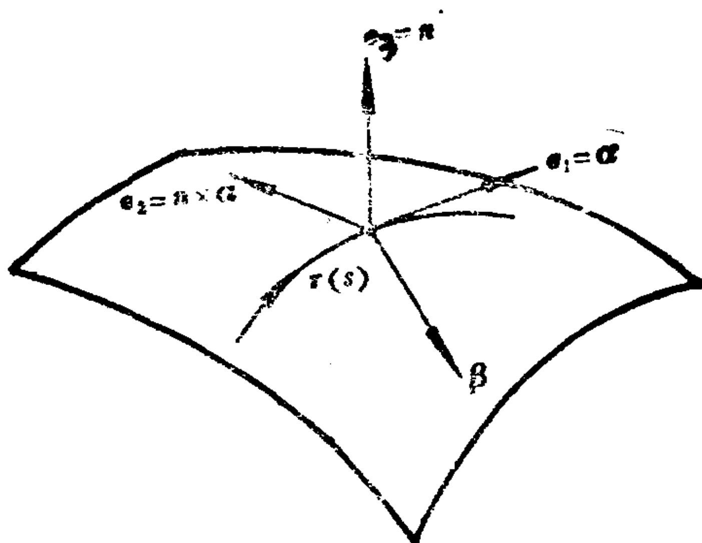


图 30

曲线上所建立的正交标架场相对照可以发现，我们现在关于曲面上曲线的这种做法与关于平面上曲线的做法是一致的；换言之，现在我们着眼于把平面上的曲线论推广成曲面上的曲线论.

我们的首要任务是建立标架场 $\{r(s);e_1,e_2,e_3\}$ 的运动公式. 很明显，我们可以设（参考第二章§4习题7）

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r(s)}{\mathrm{d}s}=e_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}=\qquad\kappa_g e_2+\kappa_n e_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s}=-\kappa_g e_1\qquad+\tau_g e_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s}=-\kappa_n e_1-\tau_g e_2,\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\kappa_n=\dfrac{\mathrm{d}^2r(s)}{\mathrm{d}s^2}\cdot e_3=\dfrac{\mathrm{d}^2r(s)}{\mathrm{d}s^2}\cdot n$ 恰好是曲面 S 上的曲线 C 的法曲率，κ_g，τ_g 都是待定的系数. 由定义式（5）可知，

$$\kappa_g = \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} \cdot \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s)), \tag{6}$$

称为曲面 S 上的曲线 C 的**测地曲率**．另外，

$$\begin{aligned} \tau_g &= \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} \cdot \boldsymbol{n} = (\dot{\boldsymbol{n}} \times \dot{\boldsymbol{r}}(s)) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= (\boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{r}}), \end{aligned} \tag{7}$$

称为曲面 S 上的曲线 C 的**测地挠率**．

下面我们来求测地曲率和测地挠率的表达式，并且讨论它们的一些性质．首先从（6）式得到

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \boldsymbol{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(s)) \\ &= \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\alpha}(s) \times (\kappa \boldsymbol{\beta}(s))] \\ &= \kappa \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) \\ &= \kappa \cos \tilde{\theta}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\tilde{\theta}$ 是曲线的次法向量与曲面的法向量之间的夹角．另外，（5）的第二式还能写成

$$\kappa \boldsymbol{\beta}(s) = \kappa_g \boldsymbol{e}_2(s) + \kappa_n \boldsymbol{n},$$

所以

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2. \tag{9}$$

实际上，在第四章§2我们已经知道

$$\kappa_n = \kappa \cos \theta, \tag{10}$$

其中 θ 是曲线的主法向量与曲面的法向量之间的夹角．利用法曲率的几何解释可以容易地导出测地曲率的几何解释．

定理1 设 C 是落在曲面 S 上的一条曲线，则曲线 C 在点 P 的测地曲率等于曲线 C 在 S 于点 P 的切平面上的投影曲线在该点的相对曲率，其中切平面的正向是由曲面 S 在点 P 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 给出的．

证明 一种证法是写出 C 的投影曲线的方程，然后通过直接计算得到所要的结论．在此，我们采用另一种证法，它以法曲率的几何解释（第四章§2定理1）为基础．

设曲面 S 在点P 的切平面是 π，从 C 上各点向π作垂直的投影线，这些投影线构成一个柱面，记为 $\bar{S}$（见图31），那么曲线 C 是曲面 S和 $\bar{S}$ 的交线，S 在点 P 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $\bar{S}$ 的切向量.然而 C是S，$\bar{S}$的公有的曲线，所以 C 的切向量 $\boldsymbol{e}_1$ 也是 $\bar{S}$ 的切向量，于是 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1$ 就成为 $\bar{S}$ 的法向量了.

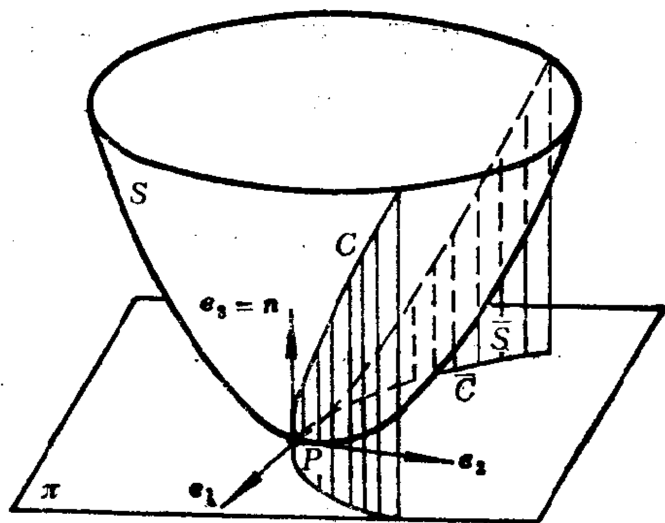


图 31

设 $\bar{C}$ 是曲面 $\bar{S}$ 与平面 π 的交线，它正是曲线 C 在平面π上的投影曲线. 由于 $\boldsymbol{e}_2$ 是曲面 $\bar{S}$ 的法向量，故 π 是曲面 $\bar{S}$ 的法截面，所以从曲面 $\bar{S}$ 上观察，投影曲线 $\bar{C}$ 是曲面 $\bar{S}$ 上与 C 相切的一条法截线，而且法截面 π 的正向是由 $\boldsymbol{n}$ 给出的，即从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为$+90°$.

设曲线 C 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则

C 作为曲面 S 上的曲线的测地曲率 κ_g

$$=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{e}_2$$

$=C$ 作为曲面 $\bar{S}$ 上的曲线的法曲率 κ_n

$=\bar{S}$ 上与 C 相切的法截线 $\bar{C}$ 的法曲曲率

$=\bar{C}$ 作为平面π上的曲线的相对曲率，

上面的最后一个等号是由于第四章§2 定理1.

现在我们要讨论测地曲率的另一个性质，它是法曲率所不具有的.

定理2 曲面上任意一条曲线的测地曲率在曲面作保长变换时是不变的.

证明 由于曲面 S 上的曲线 C 的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u^1(s),u^2(s)),$$

所以

$$\boldsymbol{e}_1(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}_\alpha\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_\alpha\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n},$$

因此

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{e}_2(s)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{r}_\gamma\cdot\boldsymbol{e}_2.$$

但是

$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{n}\times\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_2\right),$$

故

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_2)=-\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|,$$

$$\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_1)=\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|,$$

因此

$$\kappa_g=|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|\cdot\left\{\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^2{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{d^2u^1}{ds^2}+\Gamma^1{}_{\alpha\beta}\dfrac{du^\alpha}{ds}\dfrac{du^\beta}{ds}\\ \dfrac{du^2}{ds} & \dfrac{d^2u^2}{ds^2}+\Gamma^2{}_{\alpha\beta}\dfrac{du^\alpha}{ds}\dfrac{du^\beta}{ds}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

由于上式只依赖曲面的第一类基本量及其导数，和曲线的曲纹坐标参数方程，所以 κ_g 在曲面作保长变换时是不变的.

(11) 式是比较复杂的. 当曲面上取正交参数系时，曲面上曲线的测地曲率有比较简单的表达式，这就是 Liouville 公式，它有很多应用.

定理3 设 (u,v) 是曲面上的正交参数系，因而曲面的第一基本形式可以表示为 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$. 设 C: $u=u(s)$, $v=v(s)$ 是曲面上的一条曲线，其中 s 是弧长参数. 假定曲线 C 与 u-曲线的夹角为 θ，则曲线 C 的测地曲率是

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta. \tag{12}$$

证明 设 u-曲线、v-曲线的单位切向量分别记为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u,\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v. \tag{13}$$

因此

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}$$

$$=\sqrt{E}\frac{du}{ds}\boldsymbol{\alpha}_1+\sqrt{G}\frac{dv}{ds}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以

$$\cos\theta=\sqrt{E}\,\frac{du}{ds},\qquad \sin\theta=\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \tag{14}$$

因为 $\boldsymbol{e}_2$ 是由 $\boldsymbol{e}_1=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$作正向旋转90°得到的单位切向量，即 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1$，于是

$$\boldsymbol{e}_2=-\sin\theta\boldsymbol{\alpha}_1+\cos\theta\boldsymbol{\alpha}_2.$$

但是

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}(\cos\theta\boldsymbol{\alpha}_1+\sin\theta\boldsymbol{\alpha}_2)$$

$$=(-\sin\theta\boldsymbol{\alpha}_1+\cos\theta\boldsymbol{\alpha}_2)\frac{d\theta}{ds}$$

$$+\cos\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}+\sin\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_2}{ds},$$

所以

$$\kappa_g=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{d\theta}{ds}+\cos\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{e}_2+\sin\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_2}{ds}\cdot\boldsymbol{e}_2.$$

然而

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{d\boldsymbol{\alpha}_2}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=0,$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{\alpha}_2}{ds},$$

因此

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{15}$$

由（13）式得到

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\boldsymbol{r}_{uu}\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}\right).$$

很明显，

$$r_{uu}\cdot r_v = -r_u\cdot r_{uv} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$r_{uv}\cdot r_v = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

故得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

即

$$\kappa_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

作为特例，对于 u-曲线有 $\theta\equiv 0$，故 u-曲线的测地曲率是

$$\kappa_{g_1} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}; \tag{16}$$

对于 v-曲线有 $\theta\equiv\frac{\pi}{2}$，故 v-曲线的测地曲率是

$$\kappa_{g_2} = \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}. \tag{17}$$

这样，公式（12）可以改写为

$$\kappa_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \kappa_{g_1}\cos\theta + \kappa_{g_2}\sin\theta. \tag{18}$$

最后我们讨论测地挠率．由自然标架的运动公式得到

$$\dot{n}(s)=\frac{\partial n}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds}=-b_\alpha^\beta\frac{du^\alpha}{ds}r_\beta,$$

因此从（7）式得到

$$\begin{aligned}\tau_g&=(n,\dot{n},\dot{r})\\&=-b_\alpha{}^\beta\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}(n,r_\beta,r_\gamma)\\&=\left(-b_\alpha{}^1\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^2}{ds}+b_\alpha{}^2\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^1}{ds}\right)\cdot|r_1\times r_2|\\&=\sqrt{g}\left[-b_2{}^1\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2+(b_2{}^2-b_1{}^1)\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}\right.\\&\quad\left.+b_1{}^2\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2\right].\end{aligned}$$

注意到

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\qquad g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g},\qquad g^{22}=\frac{g_{11}}{g},$$

所以

$$\begin{aligned}-b_2{}^1&=-g^{11}b_{12}-g^{12}b_{22}\\&=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{12}&g_{22}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2{}^2-b_1{}^1&=g^{21}b_{12}+g^{22}b_{22}-g^{11}b_{11}-g^{12}b_{21}\\&=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{11}&g_{22}\\b_{11}&b_{22}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_1{}^2&=g^{21}b_{11}+g^{22}b_{21}\\&=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}\\b_{11}&b_{12}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

因此

$$\tau_g=\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\begin{vmatrix}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2&-\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}&\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2\\g_{11}&g_{12}&g_{22}\\b_{11}&b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}.\tag{19}$$

从上面的表达式可以知道，测地挠率和法曲率一样，事实上只是曲面上的切方向的函数，它反映的只是曲面的性质，而不是曲面上的曲线的性质．特别是，曲面上任意两条相切的曲线在切点有相同的测地挠率．显然，测地挠率不是曲面的内蕴几何量．与第四章的主方向的方程相对照容易发现，主方向恰好是曲面上使测地挠率为零的方向，因此曲面上的曲率线恰好是其切方向总是使测地挠率为零的曲线．换言之，曲率线的方程是使 $\tau_g \equiv 0$ 的曲线．下面的定理也是很有意思的．

定理 4 曲面上非直线的渐近曲线的挠率恰好是曲面沿曲线方向的测地挠率．

证明 第四章§2的习题4和上面的公式（19）已经给出了定理的证明．在这里我们来考察曲面上的渐近曲线的 Frenet 标架．在（5）式中令 $\kappa_n \equiv 0$，于是

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{e}_1, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = \kappa_g \boldsymbol{e}_2, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -\kappa_g \boldsymbol{e}_1 + \tau_g \boldsymbol{e}_3, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = -\tau_g \boldsymbol{e}_2, \end{cases} \tag{20}$$

现在该曲线不是直线，故恒有 $\kappa_g \neq 0$，于是 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\varepsilon\boldsymbol{e}_2,\varepsilon\boldsymbol{e}_3\}$ 恰好是曲线的 Frenet 标架，其中 $\varepsilon = \mathrm{sign}\,\kappa_g$．因此（20）式说明该曲线的曲率为 $|\kappa_g|$，挠率为 τ_g．

习　题

1. 证明：旋转面上纬线的测地曲率是常数，它的倒数等于在经线的切线上从切点到它与旋转轴的交点之间的线段之长．

2. 证明：在球面

$$r=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$$

$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant v<2\pi\right)$上，曲线的测地曲率可以表成

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds},$$

其中 θ 是曲线与经线（即 u-曲线）之间的夹角.

3. 证明：在曲面的一般参数 (u,v) 下，曲线 $u=u(s)$, $v=v(s)$ 的测地曲率是

$$\kappa_g=\sqrt{g}\,(B\dot{u}-A\dot{v}+\dot{u}\ddot{v}-\dot{v}\ddot{u}),$$

其中 $g=EG-F^2$, $A=\Gamma^1_{11}(\dot{u})^2+2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v}+\Gamma^1_{22}(\dot{v})^2$, $B=\Gamma^2_{11}(\dot{u})^2+2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v}+\Gamma^2_{22}(\dot{v})^2$. 特别是，参数曲线的测地曲率分别为

$$\kappa_{g_1}=\sqrt{g}\,\Gamma^2_{11}(\dot{u})^3,\quad \kappa_{g_2}=-\sqrt{g}\,\Gamma^1_{22}(\dot{v})^3.$$

4. 假定Φ是曲面 S 上的保长变换构成的变换群，并且保持曲面 S 上的一条曲线 C 不变. 证明：如果Φ限制在 C 上的作用是传递的，则曲线 C 的测地曲率必为常数.

5. 设 e_1, e_2 是曲面在一点的两个彼此正交的主方向，对应的主曲率分别为 κ_1, κ_2. 证明：曲面在该点与 e_1 成 θ 角的切方向的测地挠率是

$$\tau_g=\frac{1}{2}(\kappa_2-\kappa_1)\sin 2\theta=\frac{1}{2}\frac{d\kappa_n(\theta)}{d\theta}.$$

6. 假定曲面上经过一个双曲点的两条渐近曲线在该点的曲率不为零. 证明：这两条曲线在该点的挠率的绝对值相等、符号相反，并且这两个挠率之积等于曲面在该点的 Gauss 曲率 K（提示：利用定理 4 和习题 5 的结果）.

7. 证明：$\kappa_n^2-\tau_g^2-2H\kappa_n+\kappa=0$.

8. 证明：任何两个正交方向的测地挠率之和为零.

§2 测 地 线

由于曲面上的法曲率和测地挠率等概念都是由曲面在 E^3 中的形状决定的，因此渐近线和曲率线等概念都不是曲面上内蕴几何的概念．但是测地曲率是曲面在保长变换下的不变量，所以测地曲率 $\kappa_g\equiv0$ 的曲线是内蕴几何的概念．

定义 曲面上测地曲率恒等于零的曲线称为**测地线**．

很明显，平面曲线的测地曲率就是它的相对曲率，所以平面上的测地线就是直线．测地线的概念是平面上的直线的概念在曲面上的推广，下面我们会从各个方面来说明这种推广的含义．

定理1 曲面上一条曲线是测地线，当且仅当它是直线，或者它的主法向量处处是曲面的法向量．

证明 在§1已经知道

$$\kappa_g=\kappa\cos\tilde{\theta},$$

其中 $\tilde{\theta}$ 是曲线的次法向量和曲面的法向量的夹角．由此可见，$\kappa_g=0$ 的条件是 $\kappa=0$ 或者 $\cos\tilde{\theta}=0$．若 $\kappa\equiv0$，则该曲线是直线，若 $\kappa\neq0$，则 $\cos\tilde{\theta}\equiv0$，于是 $\tilde{\theta}\equiv\frac{\pi}{2}$，即曲线的主法向量是曲面的法向量．

作为定理1的应用，不难知道旋转面上的经线是测地线，特别是球面上的大圆周是测地线．

现在我们考虑测地线的微分方程．由§1的(5)式并且参看定理2的证明可知

$$\kappa_g\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{r}_\gamma,$$

因此 $\kappa_g\equiv0$ 的充分必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=0,\quad \gamma=1,2. \tag{1}$$

这就是测地线所满足的微分方程组.

若引进新的未知函数 v^γ，则方程组（1）便降阶成为一阶常微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{du^\gamma}{ds}=v^\gamma, \\ \dfrac{dv^\gamma}{ds}=-\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta. \end{cases} \tag{2}$$

这是拟线性常微分方程组．根据常微分方程组的理论，对于任意给定的初值 $(u_0^1,u_0^2,v_0^1,v_0^2)$，必有 $\varepsilon>0$，使得方程组（2）有定义在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的唯一解 $u^\gamma=u^\gamma(s)$，满足初条件

$$\begin{cases} u^\gamma(0)=u_0^\gamma, \\ \dfrac{du^\gamma}{ds}(0)=v_0^\gamma. \end{cases} \tag{3}$$

如果初值 (v_0^1,v_0^2) 满足条件

$$g_{\alpha\beta}(u_0^1,u_0^2)v_0^\alpha v_0^\beta=1, \tag{4}$$

则上面给出的解 $u^\gamma=u^\gamma(s)$ 是曲面上以 s 为弧长参数的一条曲线．实际上，如果命

$$f(s)=g_{\alpha\beta}(u^1(s),u^2(s))\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}-1, \tag{5}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{df(s)}{ds}&=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\frac{du^\gamma}{ds}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}+2g_{\alpha\beta}\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}\frac{du^\beta}{ds} \\ &=(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}+\Gamma_{\beta\alpha\gamma})\frac{du^\gamma}{ds}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} \\ &\quad-2g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\frac{du^\gamma}{ds}\frac{du^\delta}{ds}\frac{du^\beta}{ds} \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

并且

$$f(0)=0,$$

所以

$$f(s)\equiv 0,$$

即 s 是曲线 $u^{\gamma}=u^{\gamma}(s)$ 的弧长参数．上面的结果可以叙述为：

定理2 对于曲面上任意一点 P 以及在点 P 的任意一个单位切向量 $\boldsymbol{v}$，在曲面上必存在唯一的一条测地线通过点 P，并且以 $\boldsymbol{v}$ 为它在点 P 的切向量．

平面上的直线是具有上述性质的．

方程组（2）给出的解在 $(v_0^1,v_0^2)\neq 0$ 时一定是曲面上的正则曲线，而且一般说来该曲线的参数 s 与曲线的弧长是一次函数的关系．特别是当(4)式成立时，s是弧长参数．

若在曲面上取正交参数系(u,v)，则利用测地曲率的 Liouville 公式，测地线的方程还可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta-\dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta, \\ \dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta, \quad \dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta.\end{cases} \tag{6}$$

有时候，上述方程的求解比较简单．

例 求旋转面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,f(u))$ 上的测地线．

解 经直接计算得到曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=[1+(f'(u))^2]du^2+u^2dv^2,$$

故由(6)得测地线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{ds}=-\dfrac{1}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}\sin\theta, \\ \dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\cos\theta, \\ \dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{u}\sin\theta.\end{cases} \tag{7}$$

消去参数 s 得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\theta}{du} = -\dfrac{1}{u}\ \mathrm{tg}\theta, \\[2ex]
\dfrac{dv}{du} = \dfrac{\sqrt{1+f'^2(u)}}{u}\mathrm{tg}\theta.
\end{cases} \tag{8}
$$

将第一式积分得到

$$
u\sin\theta = c. \tag{9}
$$

因此

$$
\cos\theta = \sqrt{1-\frac{c^2}{u^2}}, \qquad \mathrm{tg}\theta = \frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}},
$$

$$
\frac{dv}{du} = \frac{c\sqrt{1+f'^2(u)}}{u\sqrt{u^2-c^2}},
$$

所以

$$
v = c_1 + \int_{u_0}^{u} \frac{c\sqrt{1+f'^2(u)}}{u\sqrt{u^2-c^2}}du. \tag{10}
$$

我们知道，在平面上连结两点的最短线是以这两点为端点的直线段. 这个性质对于测地线也成立. 我们先简要地叙述一下变分的概念.

设 C: $u^\alpha = u^\alpha(s)$ 是曲面 S 上的一条曲线，其中 $a \leqslant s \leqslant b$，且 s 是 C 的弧长参数. 如果存在定义在 $[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的可微函数

$$
u^\alpha = u^\alpha(s,t), \qquad \alpha = 1,2, \tag{11}
$$

使得

$$
u^\alpha(s,0) = u^\alpha(s), \tag{12}
$$

并且

$$
u^\alpha(a,t) = u^\alpha(a), \qquad u^\alpha(b,t) = u^\alpha(b), \tag{13}
$$

则称（11）是曲线 C 的、有固定端点的变分. 在直观上，映射（11）在曲面 S 上给出一族曲线 C_t，其中 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，它的曲纹坐标方程是

$$
u^\alpha = u^\alpha_t(s) \equiv u^\alpha(s,t), \qquad a \leqslant s \leqslant b. \tag{14}
$$

条件（12）说明，这族曲线包含 C 在内，即 $C=C_0$；条件(13)说明，每一条曲线 C_t 都与 C 有公共的端点．要注意的是，参数 s 一般不是曲线 C_t 的弧长参数．

如果 C 是连结两端点的最短线，则当 C “放”到 C 的任意一个变分 C_t 中去时，都有 $L(C)\leqslant L(C_t)$，于是应该有 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} L(C_t)=0$．我们现在要考察后一个条件意味着什么？

首先我们对 C 的变分作一些考察．命

$$\begin{aligned} v^\alpha(s) &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} u^\alpha(s,t), \\ \boldsymbol{v}(s) &= v^\alpha(s)\boldsymbol{r}_\alpha(u^1(s),u^2(s)), \end{aligned} \tag{15}$$

则 $\boldsymbol{v}(s)$ 是曲面 S 上定义在曲线 C 上的一个切向量场，称为**变分（11）的向量场**（见图32）．从直观上看，$v^\alpha(s)$ 就是曲线 $u^\alpha(s,t)$，$s=$ 常数，在 $t=0$ 处的切向量．条件（13）说明 $\boldsymbol{v}(a)=\boldsymbol{v}(b)=0$，即有固定端点的变分的向量场在端点的值为零．反过来，如果给定了曲面 S 上沿曲线 C 定义的一个切向量场 $\boldsymbol{v}(s)$，则可以定义 C 的一个变分，使它以 $\boldsymbol{v}(s)$ 为变分向量场．实际上，只要命

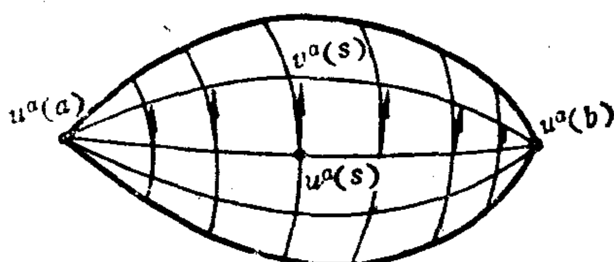


图 32

$$u^\alpha(s,t)=u^\alpha(s)+tv^\alpha(s). \tag{16}$$

很明显，如果 $v^\alpha(a)=v^\alpha(b)=0$，则上述变分必有固定的端点．

下面我们来计算 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} L(C_t)$．假定曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$，则曲线 C_t 的弧长是

$$L(C_t)=\int_a^b\sqrt{g_{\alpha\beta}(u^1(s,t),u^2(s,t))\frac{\partial u^\alpha}{\partial s}\frac{\partial u^\beta}{\partial s}}\,\mathrm{d}s. \tag{17}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(C_t)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial s}\frac{\partial u^\beta}{\partial s}}\mathrm{d}s$$

$$=\int_a^b\left\{\frac{\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial t}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial s}\dfrac{\partial u^\beta}{\partial s}+2g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial^2 u^\alpha}{\partial s\partial t}\dfrac{\partial u^\beta}{\partial s}}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial s}\dfrac{\partial u^\beta}{\partial s}}}\right\}\mathrm{d}s.$$

因为 s 是曲线 C_0 的弧长参数，故有$g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial s}\dfrac{\partial u^\beta}{\partial s}\Big|_{t=0}=1$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}L(C_t)=\int_a^b\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}v^\gamma\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}+2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right\}\mathrm{d}s.$$

由于

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)-v^\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)-v^\alpha\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}+g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2u^\beta}{\mathrm{d}s^2}\right),$$

用分部积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}L(C_t)=g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=a}^{s=b}$$

$$-\int_a^b g_{\alpha\beta}v^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\beta}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\beta{}_{\gamma\delta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s. \tag{18}$$

现在假定变分有固定的端点，由条件（13）得到 $v^\alpha(a)=v^\alpha(b)=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}L(C_t)=-\int_a^b g_{\alpha\beta}v^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\beta}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\beta{}_{\gamma\delta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s. \tag{19}$$

（18）式称为曲面 S 上的曲线 C 的弧长的**第一变分公式**，而(19)式是曲线 C 的弧长关于它的有固定端点的变分的第一变分公式.

定理3 设C是曲面S上的一条曲线，则对于C的任意一个有固定端点的变分，其变分曲线的弧长在曲线C达到临界值的充分必要条件是C是测地线.

证明 若C是测地线，则有

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2}+\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\delta}{ds}=0,$$

由（19）式可知对于任意的有固定端点的变分均有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}L(C_t)=0. \tag{20}$$

反之，假定对于任意的有固定端点的变分，（20）式成立. 取

$$v^\alpha(s)=\sin\frac{(s-a)\pi}{b-a}\cdot\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\xi\eta}\frac{du^\xi}{ds}\frac{du^\eta}{ds}\right), \tag{21}$$

则 $v^\alpha(a)=v^\alpha(b)=0$. 由假定得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}L(C_t)=\int_a^b\sin\frac{(s-a)\pi}{b-a}\cdot g_{\alpha\beta}\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\xi\eta}\frac{du^\xi}{ds}\frac{du^\eta}{ds}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{d^2u^\beta}{ds^2}+\Gamma^\beta{}_{\gamma\delta}\frac{du^\gamma}{ds}\frac{du^\delta}{ds}\right)ds$$

$$=\int_a^b\sin\frac{(s-a)\pi}{b-a}\cdot(\kappa_g)^2ds=0,$$

但是被积式$\geqslant 0$，故有

$$\sin\frac{(s-a)\pi}{b-a}\cdot(\kappa_g)^2\equiv 0,\qquad a\leqslant s\leqslant b. \tag{22}$$

于是 $\kappa_g\equiv 0$，曲线 C 是测地线. 证毕.

推论 设 P，Q 是曲面 S 上任意两点，C 是曲面 S 上连结 P，Q 两点的最短线，则 C 是测地线.

习 题

1. 证明：柱面上的测地线必定是定倾曲线.

2. 设曲线 C 是旋转面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

上的一条测地线，用 θ 表示曲线 C 与经线的交角．证明：沿测地线 C 成立恒等式

$$f(u)\cdot\sin\theta=\text{常数}.$$

3. 设在旋转面上存在一条测地线 C 与经线交成定角 θ，并且 $\theta\neq 0^\circ, 90^\circ$．证明：此旋转面必为圆柱面．

4. 证明：(1) 若曲面上一条曲线既是测地线，又是渐近曲线，则它必定是直线．

(2) 若曲面上一条曲线既是测地线，又是曲率线，则它必定是平面曲线．

(3) 若曲面上一条测地线是非直线的平面曲线，则它必定是曲率线．

5. 证明：若曲面上所有的测地线都是平面曲线，则该曲面必是全脐点曲面．

6. 已知曲面的第一基本形式如下，求曲面上的测地线：

(1) $\mathrm{I}=v(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$；

(2) $\mathrm{I}=\dfrac{a^2}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$．

7. 证明：若在曲面上存在两族测地线，它们彼此交成定角，则该曲面必是可展曲面．

8. 证明：曲面上的测地线的挠率恰是曲面沿曲线的切方向的测地挠率．

9. 假定曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切，证明：若 C 是 S_1 上的测地线，则 C 也必定是 S_2 上的测地线．

如果 C 是 S_1 上的曲率线或渐近曲线，又如何？

§ 3　测地坐标系

本节的目的是利用测地线构造曲面上特殊的参数系，使曲面的第一基本形式得到进一步的简化．所构造的特殊的参数系统称为测地坐标系．

首先我们叙述覆盖了曲面上一个区域的测地线族的概念．假定有曲面 S 上的一族测地线 Σ，如果对于区域 $D\subset S$ 中的任意一点 P，有且仅有一条属于 Σ 的测地线经过 P 点，则称 Σ 是覆盖区域 D 的测地线族．很明显，若将 Σ 中的曲线限制在 D 上，则族中任意两条不同的曲线是不会有公共点的．

如果 Σ 是覆盖了区域 D 的测地线族，则在 D 内有 Σ 的正交轨线构成的曲线族 Σ_1，于是根据第三章 § 4的讨论可知，在 D 内的任意一点的一个邻域 U 内必有参数系(u,v)，使得 Σ,Σ_1 分别就是 u-曲线族和 v-曲线族．实际上，测地线族 Σ 在 D 上给出了一个可微的非零切向量场，它同时也决定了一个与之正交的可微向量场，所以第三章 § 4的定理 1 说明了这种参数系 (u,v) 的存在性．这时，曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2. \tag{1}$$

由于 u-曲线是测地线，从 § 1的公式（16）得到

$$K_{g_1}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}=0,$$

即

$$\frac{\partial E(u,v)}{\partial v}=0, \tag{2}$$

这说明$E(u,v)$只是 u 的函数，而与 v 无关．因此可以考虑参数变换

$$\begin{cases}\tilde{u}=\int\sqrt{E(u)}\,\mathrm{d}u,\\ \tilde{v}=v,\end{cases} \tag{3}$$

从而使曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}\tilde{u}^2+\tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v})\mathrm{d}\tilde{v}^2. \tag{4}$$

我们有下面的

定理1 若 Σ 是曲面 S 上覆盖了区域 D 的测地线族，Σ_1是区域 D 内的 Σ 的正交轨线族，则 Σ_1中任意两条曲线在族 Σ 中的各条测地线上截出的曲线段的长度都相等.

证明 在区域 D 内取参数系$(\tilde{u},\tilde{v})$，使曲面的第一基本形式如(4)式所示. 在 Σ_1 中取定两条曲线，一条是C_1: $\tilde{u}=u_1$，另一条是C_2: $\tilde{u}=u_2$. 设C: $\tilde{v}=v_0$是属于 Σ 的一条曲线，它被曲线 C_1, C_2 所截，则所得截线的长度是

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}\mathrm{d}\tilde{u}\right|=|u_2-u_1|,$$

它与 v_0 的值无关. 得证.

定理2 设 C 是曲面 S 上连结 P、Q 两点的一条测地线. 如果 C 能嵌入到一个测地线族 Σ 中去，并且 Σ 所覆盖的区域 D 包含点 P 和 Q，则 C 是区域 D 内连结 P、Q 两点的最短线.

证明 在曲面上取参数系 $(\tilde{u},\tilde{v})$，使曲面的第一基本形式为（4）. 假定曲线 C 恰好是曲线 $\tilde{v}=0$，而点 P 的曲纹坐标是（0，0），点 Q 的曲纹坐标是 $(l,0)$，其中 $l=L(C)$. 若$\widetilde{C}$是 Σ 所覆盖的区域 D 内、连结 P,Q 的任意一条曲线，设它的方程是 $\tilde{u}=u(t)$，$\tilde{v}=v(t)$，$0\leqslant t\leqslant l$，则

$$L(\widetilde{C})=\int_0^l\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+G(u(t),v(t))\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_0^l\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\geqslant\int_0^l\mathrm{d}u=l,$$

故有$L(\widetilde{C})\geqslant L(C)$.

定理1的直观意义是测地线族的两条正交轨线之间的距离是处处相等的，从这个意义上说这两条正交轨线是测地平行的.

在曲面上构造覆盖某个区域的测地线族的方法有很多．在此我们介绍两种方法，所对应的参数系分别称为测地平行坐标系和测地极坐标系．

首先在曲面 S 上取一条测地线 C；经过 C 上每一点可作一条测地线与曲线 C 正交，这些测地线组成的曲线族记作 Σ，则 Σ 必覆盖了曲线 C 的一个邻域（见图33）．根据前面所述，在 C 的邻域内可以取参数系 (u,v)，使得 Σ 是其中的 u-曲线族，而 C 对应于 $u=0$，并且曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2.$$

在必要时经过适当的参数变换(例如,命 $\tilde{v}=\int\sqrt{G(0,v)}\mathrm{d}v$)，可使 v 是曲线 C 上的弧长参数，因此

$$G(0,v)=1.$$

又因为 $C: u=0$ 是测地线，故它的测地曲率

$$\kappa_g\Big|_{u=0}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\Big|_{u=0}=0,$$

即

$$G_u(0,v)=0.$$

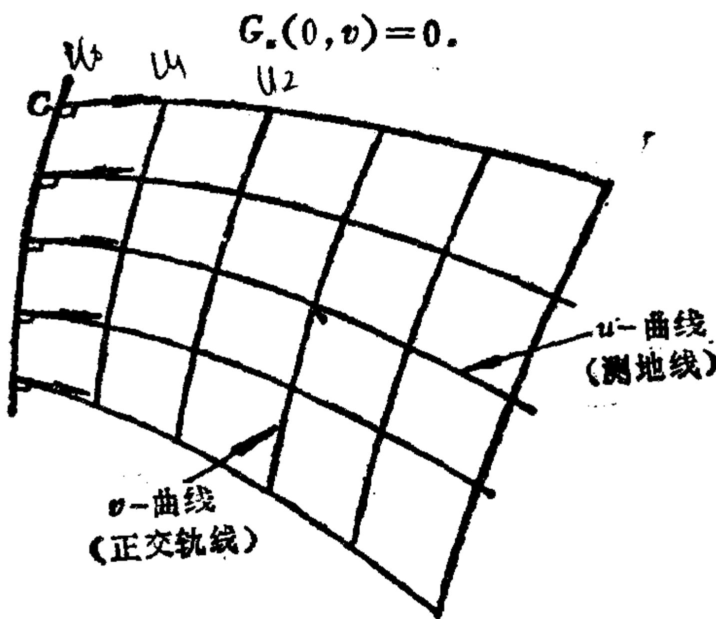


图 33

因此我们有

定理 3 在曲面上每一点的一个充分小的邻域内必存在参数

系(u,v)，使得曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2, \tag{5}$$

其中函数 $G(u,v)$满足条件：

$$\begin{cases} G(0,v)=1, \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}(0,v)=0. \end{cases} \tag{6}$$

这样的参数系称为曲面上在该点附近的**测地平行坐标系**.

很明显，平面上的测地平行坐标系就是通常的笛卡儿直角坐标系.

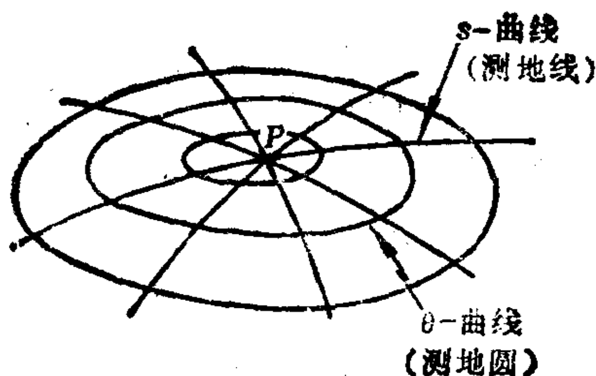


图 34

现在，在曲面 S 上任意取定一点 P，把从 P 点出发的所有的测地线的集合记作 Σ.很明显，在将点 P 的一个邻域去掉点 P 本身所得的区域内，Σ 是一个测地线族（见图34）. 设 $r>0$ 是一个充分小的正数，在每一条从点 P 出发的测地线上到点 P 的弧长为 r 的点所构成的轨迹称为以 P 为中心、以 r 为半径的**测地圆**. 将全体以 P 为中心的测地圆的集合记作 Σ_1.

引理 从点 P 引出的测地线与以点 P 为中心的测地圆是彼此正交的，即 Σ_1 中的每一条曲线是测地线族 Σ 的正交轨线.

证明 假定(u^1,u^2)是点 P 附近的参数系，点 P 对应于坐标 $u^\alpha=0$，$\alpha=1,2$.设曲面的第一基本形式是$\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$. 用

θ 记在点 P 与 u^1-曲线所成的方向角. 根据 §2的定理 2，经过点 P、与 u^1-曲线成 θ 角的测地线可以记成 $u^\alpha=u^\alpha(s,\theta)$，其中 s 是弧长参数，并且 $u^\alpha(s,\theta)$是 s,θ 的可微函数. Σ 中的曲线就是 θ =常数所给出的曲线；Σ_1 中的曲线就是 s=常数所给出的曲线. 命 C 是测地线 $\theta=0$,即 $u^\alpha=u^\alpha(s,0),0\leqslant s\leqslant r$，则 $u^\alpha=u^\alpha(s,\theta)$是曲线$C$的一个变分,其变分场为$v^\alpha(s)=\left.\frac{\partial u^\alpha(s,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}$.

由于 $u^\alpha(0,\theta)=0$，所以 $v^\alpha(0)=0$；而 $v^\alpha(r)$ 则是测地圆 $u^\alpha=u^\alpha(r,\theta)$在 $\theta=0$处的切向量. 根据 §2 的曲线弧长的第一变分公式（18），我们有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} L(C_\theta)= & \left. g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}^{s=r} \\
& -\int_0^r g_{\alpha\beta}v^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\beta}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\beta{}_{\gamma\delta}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\delta}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \\
= & \left. g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right|_{s=r}.
\end{aligned}
$$

但是每一条测地线 $C_\theta: u^\alpha=u^\alpha(s,\theta),0\leqslant s\leqslant r$ 的弧长都是 r，所以$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}L(C_\theta)=0$，于是从上式得到

$$\left. g_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right|_{s=r}=0.$$

这说明测地线 C 与半径为 r 的测地圆是彼此正交的. 证毕.

通常称上面的引理为 Gauss 引理.

由于 Σ_1 是 Σ 的正交轨线族，并且Σ是测地线族，s 是测地线的弧长，因此根据前面的讨论(s,θ)是点 P 近旁的参数系，而且曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2+G(s,\theta)\mathrm{d}\theta^2. \tag{7}$$

我们想要知道 $G(s,\theta)$应该具有哪些性质.

假定(u^1,u^2)是点 P 附近的正交参数系，点 P 的坐标为

$u^\alpha=0$， $\alpha=1,2$. 这样，曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=g_{11}(\mathrm{d}u^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}u^2)^2, \tag{8}$$

并且还能要求 $g_{11}(0)=g_{22}(0)=1$. 利用(s,θ)在点 P 附近还能引进如下的参数系：

$$\begin{cases} x^1=s\cos\theta, \\ x^2=s\sin\theta. \end{cases} \tag{9}$$

这样的参数系称为点 P 附近的法坐标系，因为在这样的参数系下，经过点 P 的测地线方程 $x^\alpha=x^\alpha(s)$是 s 的线性函数. 假定在参数系(x^1,x^2)下，曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta. \tag{10}$$

由于

$$\mathrm{d}x^1=\cos\theta\mathrm{d}s-s\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}x^2=\sin\theta\mathrm{d}s+s\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s&=\cos\theta\mathrm{d}x^1+\sin\theta\mathrm{d}x^2=\frac{x^1\mathrm{d}x^1+x^2\mathrm{d}x^2}{s}, \\ \mathrm{d}\theta&=\frac{\cos\theta\mathrm{d}x^2-\sin\theta\mathrm{d}x^1}{s}=\frac{x^1\mathrm{d}x^2-x^2\mathrm{d}x^1}{s^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

代入（7）式，并与（10）式比较得到

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11}&=\frac{(x^1)^2}{s^2}+G\cdot\frac{(x^2)^2}{s^4} \\ &=1+\frac{(x^2)^2}{s^2}\left(\frac{G}{s^2}-1\right), \\ \tilde{g}_{12}&=\frac{2x^1x^2}{s^2}\left(1-\frac{G}{s^2}\right), \\ \tilde{g}_{22}&=\frac{(x^2)^2}{s^2}+G\cdot\frac{(x^1)^2}{s^4}=1+\frac{(x^1)^2}{s^2}\left(\frac{G}{s^2}-1\right). \end{aligned} \tag{12}$$

于是对于所有的 x^1,x^2 成立

$$(x^1)^2(\tilde{g}_{11}-1)=(x^2)^2(\tilde{g}_{22}-1). \tag{13}$$

下面我们先考察 $\tilde{g}_{11}$，$\tilde{g}_{22}$在 $x^\alpha=0$，$\alpha=1,2$ 时的性状. 假定从

P 出发、与 u^1-曲线成 θ 角的测地线方程为 $u^\alpha = u^\alpha(s,\theta)$，其中 s 是弧长参数，因此

$$\left(\frac{\partial u^1}{\partial s}, \frac{\partial u^2}{\partial s}\right)_{s=0} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{x^1}{s}, \frac{x^2}{s}\right),$$

所以

$$x^\alpha = s \cdot \left.\frac{\partial u^\alpha(s,\theta)}{\partial s}\right|_{s=0}. \tag{14}$$

由于 $u^\alpha = u^\alpha(s,\theta)$ 满足测地线方程

$$\frac{\partial^2 u^\alpha(s,\theta)}{\partial s^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\partial u^\beta(s,\theta)}{\partial s}\frac{\partial u^\gamma(s,\theta)}{\partial s} = 0,$$

所以

$$s^2 \cdot \left.\frac{\partial^2 u^\alpha(s,\theta)}{\partial s^2}\right|_{s=0} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(0)x^\beta x^\gamma. \tag{15}$$

因此由 Taylor 展开式得到

$$\begin{aligned} u^\alpha &= u^\alpha(s,\theta) \\ &= u^\alpha(s,\theta)\Big|_{s=0} + s \cdot \left.\frac{\partial u^\alpha(s,\theta)}{\partial s}\right|_{s=0} \\ &\quad + \frac{s^2}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 u^\alpha(s,\theta)}{\partial s^2}\right|_{s=0} + \cdots \\ &= x^\alpha - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(0)x^\beta x^\gamma + \cdots, \end{aligned}$$

于是上式给出的从 (u^1, u^2) 到 (x^1, x^2) 的变换是容许的参数变换，并且

$$\left.\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{(x^1,x^2)=0} = \delta^\alpha_\beta, \tag{16}$$

因此，比较(8)，(10)两式得到

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11}(0) &= g_{11}(0) = 1, \\ \tilde{g}_{12}(0) &= g_{12}(0) = 0, \\ \tilde{g}_{22}(0) &= g_{22}(0) = 1. \end{aligned} \tag{17}$$

这说明法坐标系在点 P 是正交的. 将 $\tilde{g}_{11}$, $\tilde{g}_{22}$ 在点 P 附近

展开，并且利用恒等式（13），不难知道

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{11}-1=\lambda(x^2)^2+\cdots,\\ \tilde{g}_{22}-1=\lambda(x^1)^2+\cdots,\end{aligned} \tag{18}$$

其中 λ 是常数，并且省略部分是 x^1,x^2 的高于二次的项. 把(18)式代入(12)的第一、三两式得到

$$\frac{(x^2)^2}{s^2}\left(\frac{G}{s^2}-1\right)=\lambda(x^2)^2+\cdots,$$

$$\frac{(x^1)^2}{s^2}\left(\frac{G}{s^2}-1\right)=\lambda(x^1)^2+\cdots.$$

两式相加得到

$$\frac{G}{s^2}-1=\lambda s^2+\cdots,$$

即

$$G=s^2+\lambda s^4+\cdots,$$

$$\sqrt{G}=s\left(1+\frac{\lambda}{2}s^2+\cdots\right). \tag{19}$$

因此

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{G}=0,\quad \lim_{s\to 0}(\sqrt{G})_s=1.$$

综合上面的讨论我们有

定理 4 在曲面上每一点的邻近必存在参数系(s,θ)，使得曲面的第一基本形式成为

$$\mathrm{I}=ds^2+G(s,\theta)d\theta^2, \tag{20}$$

其中函数 $G(s,\theta)$满足条件:

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{G(s,\theta)}=0,\quad \lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{G(s,\theta)}=1. \tag{21}$$

上述参数系称为曲面上在该点邻近的**测地极坐标系**.

显然，平面上的极坐标系就是测地极坐标系.

习 题

1. 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=du^2+G(u,v)dv^2$，求

$_{\beta\gamma}$ 及 Gauss 曲率 K.

2. 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = du^2 + G(u,v)dv^2$，并且 $G(u,v)$ 满足条件 $G(0,v)=1$，$G_u(0,v)=0$. 证明：

$$G(u,v) = 1 - u^2K(0,v) + o(u^2).$$

3. 设曲面上以点 P 为中心、以 r 为半径的测地圆的周长为 L_r，所围的面积是 A_r，证明：点 P 处的 Gauss 曲率是

$$K_P = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L_r}{r^3}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - A_r}{r^4}.$$

§4 常曲率曲面

在第四章§6我们已经考察过 Gauss 曲率为常数的旋转曲面. Gauss 曲率为常数的曲面称为常曲率曲面. 在本节，我们利用测地坐标系，可以决定常曲率曲面的第一基本形式.

假定曲面 S 的 Gauss 曲率 K 是常数. 在曲面上取测地平行坐标系(u,v)，因而它的第一基本形式成为

$$\mathrm{I} = du^2 + G(u,v)dv^2, \tag{1}$$

并且 $G(u,v)$ 满足条件：

$$G(0,v)=1, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}(0,v)=0. \tag{2}$$

根据 Gauss 曲率 K 的内蕴表达式，我们有

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu},$$

所以$\sqrt{G}$作为 u 的函数满足二阶常系数齐次方程

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0, \tag{3}$$

初条件是（根据（2）式）：

$$\sqrt{G}(0,v)=1, \quad (\sqrt{G})_u(0,v)=0. \tag{4}$$

不难知道，根据 K 的不同符号，方程（3）在初条件（4）下的解分别是：

(i) $K>0$, $\sqrt{G}=\cos(\sqrt{K}u)$;

(ii) $K=0$, $\sqrt{G}=1$.

(iii) $K<0$, $\sqrt{G}=\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u)$.

因此常曲率曲面的第一基本形式分别为：

若 S 有正常数 Gauss 曲率 K，则

$$\mathrm{I}=du^2+(\cos\sqrt{K}u)^2dv^2;$$

若 S 的 Gauss 曲率为零，则 $\mathrm{I}=du^2+dv^2$,

若 S 有负常数 Gauss 曲率 K，则

$$\mathrm{I}=du^2+(\operatorname{ch}\sqrt{-K}u)^2dv^2.$$

所以，我们有下面的

定理1 有相同的常数 Gauss 曲率的曲面在局部上必定可以彼此建立保长对应.

通过前面各节的讨论可以知道，著名的 Gauss 定理启发我们去研究只具有第一基本形式的抽象曲面. 换句话说，我们所考察的曲面不再是放在 E^3 中的一个弯曲的曲面，而是一个二变数 u,v 的区域 D，在 D 上给定了一个正定的二次微分形式

$$\mathrm{I}=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2,$$

它的几何意义就是在点(u,v)的切向量(du,dv)的长度平方. 抽象曲面上在一点的两个切向量(du,dv)和$(\delta u,\delta v)$之间的夹角以及曲面上曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$的长度可以用这个正定的二次微分形式 I 按照第三章 §3的公式（13),(16）进行计算. 在这样的抽象曲面上，有丰富的几何可以研究，其中最主要的几何量是 Gauss 曲率 K，此外还有曲线的测地曲率以及测地线等等. 在这种抽象曲面中，最简单的是所谓的常曲率曲面，它们的第一基本形式完全由它们的常数 Gauss 曲率所确定. 历史上从欧氏几何到

非欧氏几何的发展，实际上就是从平面几何到常曲率曲面上的几何的发展. 更一般地，我们有抽象曲面上的几何. 在这种推广过程中，直线换成了测地线，相对曲率变成了测地曲率. 根本的不同之处在于所谈论的“空间”的 Gauss 曲率的不同，也就是“空间”的度量结构不同. 欧氏几何的“空间”的 Gauss 曲率为零，这种“空间”是平坦的；非欧几何的“空间”的 Gauss 曲率不为零，因此该“空间”是弯曲的. 由于 Gauss 曲率符号的不同，影响了“空间”中测地线的性状不同，也决定了测地三角形的内角和的不同，在§6的 Gauss-Bonnet 公式清楚地揭示了这个事实. 下面我们通过一个例子来说明常曲率“空间”中的测地线的性状.

例 考虑第一基本形式为 $\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{\left[1+\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)\right]^2}$ 的曲面.

通过直接计算可以知道，该曲面的 Gauss 曲率 K 是常数 c. 当 $c\geqslant 0$ 时，该抽象曲面可以定义在整个(u,v)平面上；当 $c<0$ 时，该抽象曲面的定义域是：$u^2+v^2<-\dfrac{4}{c}$.

设 $c=0$，则 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$，所以这个抽象曲面就是普通的平面. 它上面的测地线就是普通的直线.

设 $c>0$，则这个抽象曲面可以看作 E^3 中半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ 的球面通过从南极向球面在北极的切平面作球极投影所得到的象（见图35，参看第三章§2习题2）. 具体地说，这个投影的表达式是

$$u=\frac{2x}{\sqrt{c}\ z+1},\quad v=\frac{2y}{\sqrt{c}\ z+1},\tag{5}$$

或者

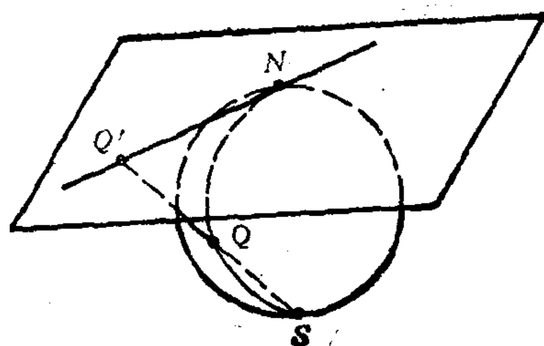


图 35

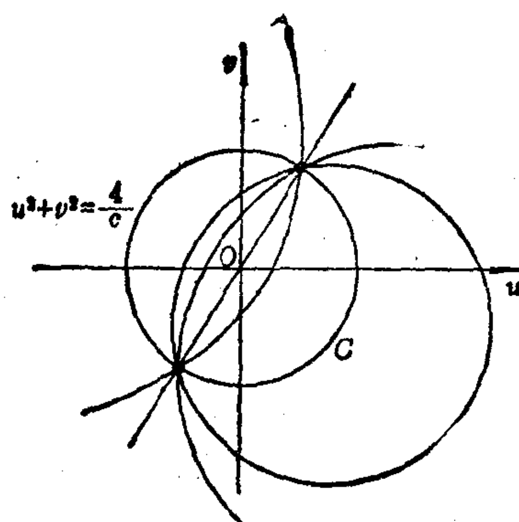


图 36

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{1+\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)}, \\ y=\dfrac{v}{1+\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)}, \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)}{1+\dfrac{c}{4}(u^2+v^2)}. \end{cases} \tag{6}$$

在球面上，测地线就是大圆周．很明显，这些大圆周在球极投影下的象是(u,v)-平面上以原点为中心、以$\frac{2}{\sqrt{c}}$为半径的圆周 C，以及所有的经过圆周 C 的一对对径点的直线和圆周(见图36)．很明显，在这个抽象曲面上任意两条测地线是彼此相交的．

在 $c<0$ 的情形，在圆 $u^2+v^2<-\frac{4}{c}$内赋予度量

$$\mathrm{I}=\frac{du^2+dv^2}{\left[1+\frac{c}{4}(u^2+v^2)\right]^2}$$

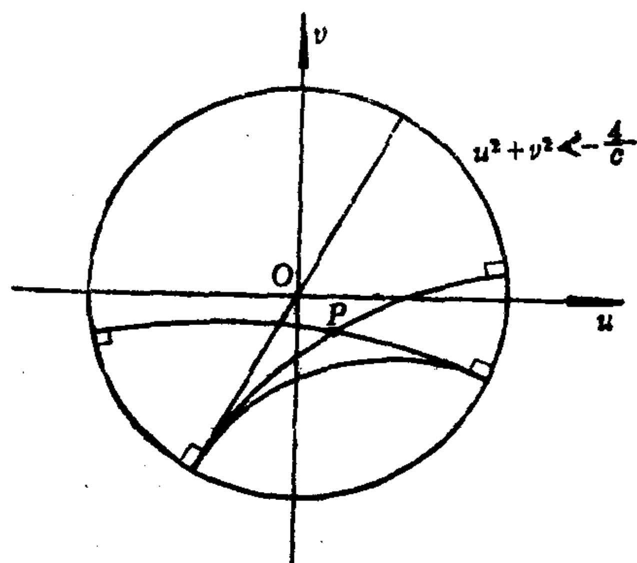


图 37

的抽象曲面称为 Klein 圆. 可以证明：在 Klein 圆内的测地线是圆内与圆周 $u^2+v^2=-\frac{4}{c}$ 正交的圆弧或直径（见图37）. 很明显，过"直线"外一点可以作无数条"直线"与已知"直线"不相交. 因此，在 Klein 圆内，欧氏几何的"平行公设"(即：过直线外一点所引的与该直线平行的直线不能多于一条）不再成立. Klein 圆是非欧几何的模型. 在第四章 §6我们已经知道伪球面有负的常数 Gauss 曲率，所以非欧几何可以在伪球面上实现.

习 题

1. 试在测地极坐标系下写出常曲率曲面的第一基本形式.

2. 证明：在常曲率曲面上，以点 P 为中心的测地圆具有常测地曲率.

3. 已知常曲率曲面的第一基本形式是

$$
\mathrm{I}=\begin{cases} du^2+\frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}u)dv^2, & K>0, \\ du^2-\frac{1}{K}\mathrm{sh}^2(\sqrt{-K}u)dv^2, & K<0. \end{cases}
$$

证明：该曲面上的测地线可以分别表示为：

$$
A\sin(\sqrt{K}u)\cos v+B\sin(\sqrt{K}u)\sin v+C\cos(\sqrt{K}u)=0,
$$

及

$$
A\mathrm{sh}(\sqrt{-K}u)\cos v+B\mathrm{sh}(\sqrt{-K}u)\sin v + C\mathrm{ch}(\sqrt{-K}u)=0,
$$

其中 A,B,C 是不全为零的常数.

4. 试求 Klein 圆：$u^2+v^2<1$，$\mathrm{I}=\frac{du^2+dv^2}{[1-(u^2+v^2)]^2}$内的测地线.

5. 试求

Klein 圆：$u^2+v^2<1$，$\mathrm{I}=\frac{du^2+dv^2}{[1-(u^2+v^2)]^2}$

和

Poincaré 上半平面：$y>0$，$\mathrm{I}=\frac{1}{4y^2}(dx^2+dy^2)$

之间的保长对应.

6. 第一基本形式如下的曲面都具有常数 Gauss 曲率 $-\frac{1}{a^2}$. 试求它们之间的保长对应：

(1) $\mathrm{I}=\frac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2)\quad(v>0)$；

(2) $\mathrm{I}=du^2+e^{\frac{2u}{a}}dv^2$；

(3) $\quad \mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{ch}^2 \dfrac{u}{a} \mathrm{d}v^2.$

§5 曲面上向量场的平行移动

本节我们要叙述曲面上的内蕴几何的一个十分重要的概念，即曲面上的一个切向量沿一条曲线的平行移动．为了容易理解起见，我们在 E^3 中的曲面上来考虑．但是，这些讨论可以推广到具有第一基本形式的抽象曲面上去．

设 S 是 E^3 中的一个曲面，它的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$．假定 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$是定义在 S 上的一个切向量场，所以它在自然基底$\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$下可以表示成

$$\boldsymbol{X}(u^1,u^2)=x^\alpha(u^1,u^2)\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2). \tag{1}$$

如果 $x^\alpha(u^1,u^2)$是可微函数，则称切向量场 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$是可微的．把 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$看作空间 E^3 中定义在曲面 S 上的向量场，微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$当然是有意义的．从直观上看，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$是向量场 $\boldsymbol{X}$ 在无限邻近的两点(u^1,u^2)和$(u^1+\mathrm{d}u^1,u^2+\mathrm{d}u^2)$的值之差，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)=\boldsymbol{X}(u^1+\mathrm{d}u^1,u^2+\mathrm{d}u^2)-\boldsymbol{X}(u^1,u^2).$$

在上面的考虑中，两个有不同起点的向量能够作减法的根据在于把它们看作 E^3 中的向量，因此通过 E^3 中的平行移动把这两个向量的起点变成同一个点．但是一般说来，向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$不再与曲面 S 相切了．实际上，由（1）得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)&=\mathrm{d}x^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha+x^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha\\&=(\mathrm{d}x^\alpha+x^\beta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\mathrm{d}u^\gamma)\boldsymbol{r}_\alpha+x^\alpha\mathrm{d}u^\beta b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}.\end{aligned} \tag{2}$$

为了从 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$构造出 S 的切向量，只要将 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$在 S 的切空间上作投影即可．

定义 1 命

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)=(\mathrm{d}\boldsymbol{X}(u^1,u^2))^\tau, \tag{3}$$

其中 T 表示向 S 在点(u^1,u^2)的切空间作正交投影. 我们把$\mathrm{D}\boldsymbol{X}$称为切向量场 $\boldsymbol{X}(u^1,u^2)$的绝对微分.

由（2）式可知,

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}(u^1,u^2)=(\mathrm{d}x^\alpha+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}x^\beta\mathrm{d}u^\gamma)\boldsymbol{r}_\alpha. \tag{4}$$

命

$$\mathrm{D}x^\alpha=\mathrm{d}x^\alpha+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}x^\beta\mathrm{d}u^\gamma, \tag{5}$$

则

$$\mathrm{D}\boldsymbol{X}=\mathrm{D}x^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha. \tag{6}$$

我们把 $\mathrm{D}x^\alpha$ 称为切向量场 $\boldsymbol{X}$ 的分量 x^α 的绝对微分.

从表达式（4）立即可得下面的

定理1 曲面 S 上的切向量场的绝对微分在曲面的保长变换下是不变的，即：如果 $\sigma: S\to\tilde{S}$ 是保长对应，则对 S 上的任意一个可微的切向量场 $\boldsymbol{X}$ 成立

$$\sigma_*(\mathrm{D}\boldsymbol{X})=\mathrm{D}(\sigma_*\boldsymbol{X}). \tag{7}$$

证明 在 S 和$\tilde{S}$上取适用的参数系，使得σ是曲面 S 和 $\tilde{S}$ 上有相同参数值的点之间的对应，并且 σ_* 把 S 上的自然基底向量映为$\tilde{S}$上对应的自然基底向量，因此 $\boldsymbol{X}$ 和 $\sigma_*\boldsymbol{X}$ 关于各自的自然基底有相同的分量 $x^\alpha(u^1,u^2)$，因为σ是保长对应，故 S 和$\tilde{S}$在对应点有相同的第一类基本量，因而有相同的 Christoffel 记号. 由（4）式可知，$\mathrm{D}\boldsymbol{X}$ 和 $\mathrm{D}(\sigma_*\boldsymbol{X})$ 关于各自的自然基底有相同的分量，因此（7）式成立. 证毕.

定理2 曲面 S 上的切向量场的绝对微分有下列运算法则：

(i) $\mathrm{D}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\mathrm{D}\boldsymbol{X}+\mathrm{D}\boldsymbol{Y}$;

(ii) $\mathrm{D}(f\cdot\boldsymbol{X})=\mathrm{d}f\cdot\boldsymbol{X}+f\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{X}$;

(iii) $\mathrm{d}(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})=\mathrm{D}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{Y}$,

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是曲面 S 上任意两个可微的切向量场， f 是定义在 S 上的可微函数.

定理2说明绝对微分 D 具有普通微分 d 所具备的相同的运算法则. 证明留给读者自己完成.

设 $C: u^\alpha = u^\alpha(t)$是曲面 S 上的一条曲线. 假定 $\boldsymbol{X}(t)$是曲面 S 的沿曲线 C 定义的切向量场. 与前面所述相仿, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$是沿曲线 C 定义的向量场, 但是一般说来 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$不再是曲面 S 的切向量. 为了得到曲面 S 的沿曲线 C 定义的切向量场, 只要将$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$投影到曲面 S 在对应点的切空间就行了.

定义2 命

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^t, \tag{8}$$

我们把$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$称为曲面 S 的切向量场 $\boldsymbol{X}(t)$沿曲线 C 的**绝对微商**.

若设

$$\boldsymbol{X}(t) = x^\alpha(t)\boldsymbol{r}_\alpha(u^1(t), u^2(t)), \tag{9}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} x^\beta \frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{r}_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\alpha \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n},$$

所以根据定义得到

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} x^\beta \frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{r}_\alpha. \tag{10}$$

命

$$\frac{\mathrm{D}x^\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} x^\beta(t) \frac{\mathrm{d}u^\gamma(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{11}$$

称之为分量 $x^\alpha(t)$的绝对微商, 并且

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}x^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_\alpha. \tag{12}$$

很明显, $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}$在曲面 S 的保长变换下是不变的, 并且算子$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$具有定理 2 所述的运算规律.

类似地，若 $x^{\alpha}(u^1,u^2)$是定义在曲面 S 上的切向量场的分量，命

$$x^{\alpha}{}_{,\gamma}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{\gamma}}+\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}x^{\beta},\tag{13}$$

则 (5) 式可以写成

$$\mathrm{D}x^{\alpha}=x^{\alpha}{}_{,\gamma}\mathrm{d}u^{\gamma}.\tag{14}$$

我们把 $x^{\alpha}{}_{,\gamma}$ 称为 x^{α} 的绝对微商.

定义 3 设 $X(t)$是曲面 S 的沿曲线 $C:u^{\alpha}=u^{\alpha}(t)$定义的切向量场. 如果$\frac{\mathrm{D}X(t)}{\mathrm{d}t}\equiv 0$，则称切向量场 $X(t)$沿曲线 C 是**平行的**.

由 (11) 式可知，切向量场 $X(t)$沿曲线C平行的充分必要条件是它的分量 $x^{\alpha}(t)$满足常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}x^{\beta}\frac{\mathrm{d}u^{\gamma}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \alpha=1,2.\tag{15}$$

这是一阶线性齐次常微分方程组. 根据常微分方程理论，对于给定的可微曲线 $C:u^{\alpha}=u^{\alpha}(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，以及给定的初值 x_0^{α}，方程组 (15) 有唯一的一组解

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b,\tag{16}$$

使得

$$x^{\alpha}(t_0)=x_0^{\alpha},\tag{17}$$

其中 t_0 是区间$[a,b]$中的一个固定点. 我们把向量场 $X(t)=x^{\alpha}(t)r_{\alpha}(u^1(t),u^2(t))$ 称为 S 上的切向量 $x_0^{\alpha}r_{\alpha}(u^1(t_0),u^2(t_0))$ 沿曲线 C 平行移动所产生的切向量场.

因为 (15) 是线性齐次方程组，所以它的解的全体构成一个向量空间，它与S在r_0的切空间同构，其中 $r_0=r(u^1(t_0),u^2(t_0))$. 用几何语言说，上面的性质表明：曲面 S 上的切向量沿曲线 C 的平行移动在曲面 S 沿曲线 C 的各点的切空间之间建立了线性同构. 另外，由定理 2 的(iii)可知，若 $X(t)$，$Y(t)$是曲面 S 上沿曲线 C 平行的切向量场，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X(t)\cdot Y(t))=\frac{\mathrm{D}X(t)}{\mathrm{d}t}\cdot Y(t)+X(t)\cdot\frac{\mathrm{D}Y(t)}{\mathrm{d}t}=0,$$

这说明 $X(t)\cdot Y(t)$ 是常数，即切向量沿曲线 C 的平行移动保持切向量的内积不变．综上所述，我们有下面的

定理 3　设 $C: u^\alpha=u^\alpha(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 是曲面 S 上连结点 $A=(u^1(a),u^2(a))$ 和点 $B=(u^1(b),u^2(b))$ 的一条可微曲线．用 P_a^b 表示曲面 S 上的切向量沿曲线 C 从 $t=a$ 到 $t=b$ 的平行移动，则

$$P_a^b: T_AS\to T_BS$$

是从切空间 T_AS 到 T_BS 的等距同构．

从绝对微商的定义直接可得下面的定理．

定理 4　设 E^3 中两个曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切．设 $X(t)$ 是这两个曲面的沿曲线 C 定义的切向量场，则

$$\frac{\overset{(1)}{\mathrm{D}}X(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\overset{(2)}{\mathrm{D}}X(t)}{\mathrm{d}t},$$

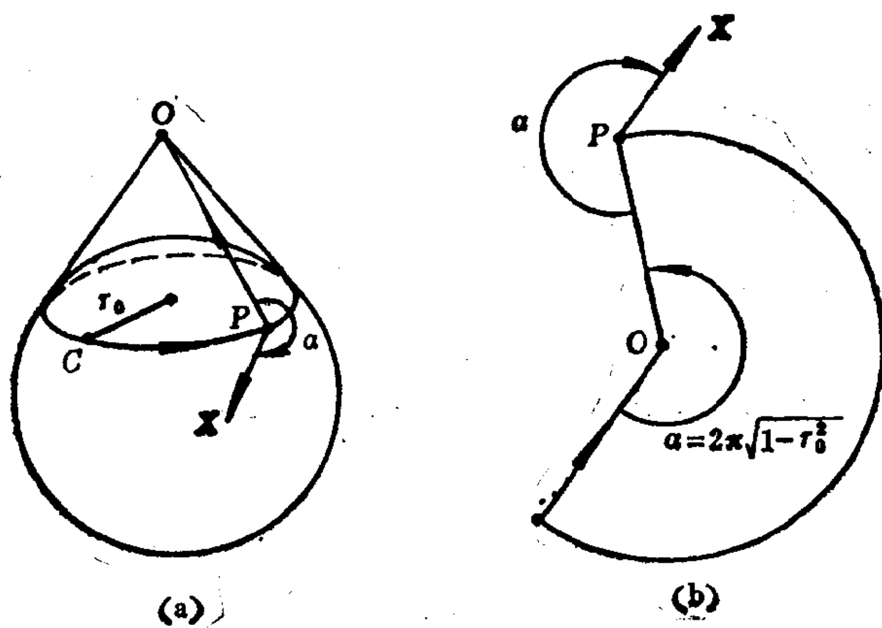


图　38

其中$\frac{\overset{(1)}{D}}{dt}$，$\frac{\overset{(2)}{D}}{dt}$分别表示曲面 S_1, S_2 沿曲线 C 的绝对微商算子.

由此可见，当 S_1 与 S_2 沿曲线 C 相切时，S_1 的切向量沿曲线 C 的平行移动与 S_2 的切向量沿曲线 C 的平行移动是一回事. 特别是，曲面 S_1 沿曲线 C 的切平面族的包络面 S_2 是一个可展曲面，它自然与 S_1 沿曲线 C 相切. 然而 S_2 可以与平面建立保长对应，所以曲面 S_1 的切向量沿曲线 C 的平行移动可以化为平面上的平行移动.

例 设 S 是 E^3 中的一个单位球面，$\bar{S}$ 是一个锥面，并且 $\bar{S}$和 S 沿圆周 C 相切（见图38(a)）. 考察球面的切向量沿圆周 C 的平行移动.

设 $\boldsymbol{X}$ 是球面 S 在点 $P\in C$ 的一个切向量，则 $\boldsymbol{X}$ 在 S 中沿曲线 C 的平行移动与 $\boldsymbol{X}$ 在 $\bar{S}$ 中沿曲线 C 的平行移动是一样的. 然而锥面$\bar{S}$与平面是等距的. 设圆周 C 的半径为 r_0，则当锥面 $\bar{S}$ 展开成平面时得到一个圆心角为 $\alpha=2\pi\cdot\sqrt{1-r_0^2}$ 的扇形（见图38(b)）. 如果切向量 $\boldsymbol{X}$ 与曲线 C 的夹角是 θ，则当 $\boldsymbol{X}$在$\bar{S}$中沿曲线 C 平行移动一周所得的切向量与 C 的夹角是 $\theta-\alpha=\theta-2\pi\cdot\sqrt{1-r_0^2}$. 由此可见，切向量在曲面上沿封闭曲线平行移动一周的结果与原切向量一般是不重合的. 切向量沿闭曲线平行移动一周所得的转角与曲面的 Gauss 曲率有关，详细的情形可看下一节.

有了绝对微商的概念之后，曲线的测地曲率的定义就和平面曲线的相对曲率的定义统一起来了. 设曲面 S 上的曲线 C 的方程是 $u^\alpha=u^\alpha(s)$，其中 s 是弧长参数，则曲线 C 的测地曲率是

$$\kappa_g=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{D\boldsymbol{e}_1(s)}{ds}\cdot\boldsymbol{e}_2(s)=\begin{vmatrix}\frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds}\\ \frac{D}{ds}\left(\frac{du^1}{ds}\right) & \frac{D}{ds}\left(\frac{du^2}{ds}\right)\end{vmatrix}. \tag{18}$$

因此在平面几何推广成曲面上的几何时，普通的微商应该换成绝对微商$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}$.

特别是，测地线的微分方程成为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)=0, \tag{19}$$

或者是

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\right)=0, \quad \alpha=1,2. \tag{20}$$

所以曲面上的测地线就是其单位切向量场在曲面中沿该曲线本身是平行的曲线，简称为自平行曲线. 这正是“平面上的直线是其切方向不变的曲线”的推广.

习　题

1. 证明：若 $x^\alpha=x^\alpha(u^1,u^2)$ 是偏微分方程组

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}=-\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}x^\gamma$$

的非零解，则 (i) $f=g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ 是非零常数；(ii) $\boldsymbol{X}=x^\alpha(u^1,u^2)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha(u^1,u^2)$ 是曲面上的切向量场，它沿曲面上任意一条曲线是平行的.

2. 证明：在曲面上存在一个非零的、与路径无关的平行切向量场，当且仅当该曲面的 Gauss 曲率为零.

3. 证明：曲面 S 上的 u^α- 曲线的单位切向量沿曲线C: $u^\gamma=u^\gamma(t)$ 是平行的充分必要条件是沿曲线 C 成立

$$\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t}=0 \quad (\beta\neq\alpha).$$

§6　Gauss-Bonnet 公式

在§4 我们已经提到过，在欧氏平面上成立的平行公设在

Klein 圆(负常曲率曲面)内不再成立了. 与之等价的是, 在欧氏平面几何学中的"三角形内角之和等于 180°"的事实在 Klein 圆内就不再为真的了. 本节我们先讨论一般的 Gauss-Bonnet 公式, 然后作为特例研究曲面上的测地三角形的内角和.

在第二章 § 7 我们已经叙述过分段光滑的简单闭曲线的概念. 现在假定 C 是曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上的一条分段光滑曲线, 它的方程可以写成 $u^1=u^1(s)$, $u^2=u^2(s)$, 其中 s 是弧长参数, $0\leqslant s\leqslant L$. 于是必有一个分割 $0=s_0<s_1<\cdots<s_n=L$, 使得 $u^\alpha(s)|_{(s_i,s_{i+1})}$是光滑函数. $s=s_1,\cdots,s_{n-1}$ 就是曲线 C 的角点. 若 $u^\alpha(0)=u^\alpha(L)$, 则 C 是封闭曲线, 一般来说, $s=s_0$ 也是曲线 C 的一个角点. 所谓 C 是简单的, 就是 C 除了在端点 $s=s_0,s_n$ 外没有其它的自交点.

定理 1 假定曲线 C 是曲面 S 上的一条分段光滑的简单闭曲线, 它所包围的区域 D 是曲面 S 上的一个单连通区域, 则

$$\oint_C \kappa_g \mathrm{d}s+\iint_D K\mathrm{d}\sigma=2\pi-\sum_{i=1}^n \alpha_i, \tag{1}$$

其中 κ_g 是曲线 C 的测地曲率, K 是曲面 S 的 Gauss 曲率, $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ 表示曲线 C 在各角点的外角之和.

证明 我们分几个步骤来证明这个定理. 首先假设 C 是连续可微的简单闭曲线, 它所包围的单连通区域 D 落在曲面的一个坐标域 (u,v) 内. 假定 (u,v) 是正交系, 于是曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2. \tag{2}$$

设曲线 C 的方程是 $u=u(s)$, $v=v(s)$, s 是弧长参数. 用 $\theta(s)$ 表示曲线 C 与 u-曲线在 s 处所成的方向角, 则由 Liouville 公式得到

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta .$$

将 κ_g 沿曲线 C 积分，得到

$$\oint_C \kappa_g \mathrm{d}s=\oint_C \mathrm{d}\theta+\oint_C\left(-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta\right)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_C \mathrm{d}\theta+\oint_C\left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v\right), \tag{3}$$

在上面的第二个等号中利用了公式$\sqrt{E}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\cos\theta$， $\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ $=\sin\theta$. 根据 Green 公式，后一个积分是

$$\oint_C\left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v\right)$$

$$=\int_D\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-\int_D K\mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

因为θ是曲线 C 与 u- 曲线所成的方向角，故能够取θ的连续分支，并且θ的连续分支是s的可微函数，所以$\oint_C \mathrm{d}\theta$ 是θ的一个连续分支在起、终点的值之差，它必是 2π 的整数倍. 此外，当曲面的第一类基本量 E，G 作连续变化时，积分$\oint_C \mathrm{d}\theta$ 的值也必然作连续的变化，因而它的值在 E,G 作连续变化时是不变的. 现在 $E>0$，$G>0$，因此 E，G 可以保持正值连续地变为 1，实际上只要取 $E_t=1+t(E-1)$，$G_t=1+t(G-1)$. 这样，当 $t=0$ 时，C 成为平面上一条简单闭曲线，并且 C 的定向与区域

D 的定向是协调的，故由旋转指标定理得到

$$\oint_C d\theta = 2\pi. \tag{5}$$

综合上面的结果得到

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi. \tag{6}$$

如果 C 是分段光滑的简单闭曲线，它在各角点的外角是 α_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，则由旋转指标定理得到

$$\oint_C d\theta + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi, \tag{7}$$

于是（3）式仍旧成立，故得

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{8}$$

现在假定区域 D 不能包含在一个坐标域内，但是总可以把 D 分割得充分细，使得每一个小块包含在一个正交坐标域内，而且每一小块的边界曲线是分段光滑的简单闭曲线，因此（8）式对于这样的每一小块曲面成立．现在假定使(8)式成立的两小块单连通区域有公共的边界，则区域所赋予公共边界的定向恰好是相反的，所以测地曲率 κ_g 在公共边界上的积分是相互抵销的（见图39）．从图上可以看出，将公式（8）用于区域 D_1, D_2，把这两式相加，最终仍然得到用于区域 D_1+D_2 的公式（8）．

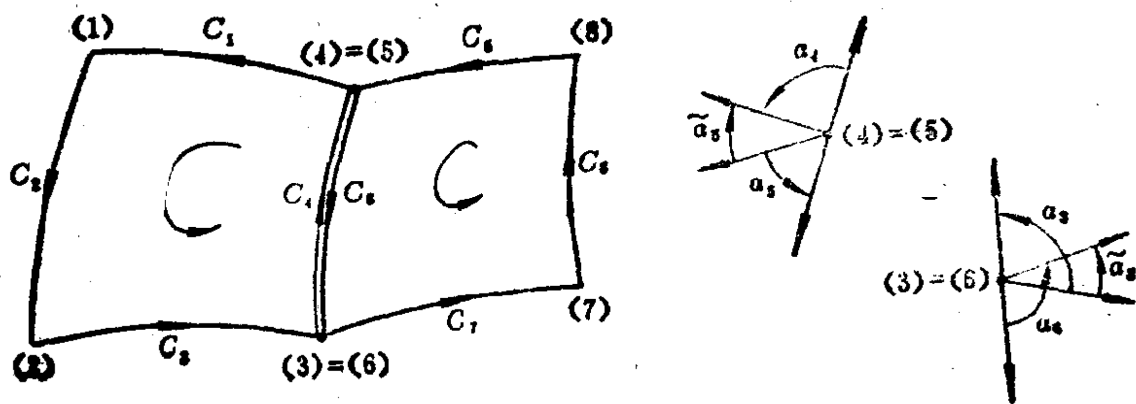


图 39

实际上，D_1+D_2 的边界是由 C_1,C_2,C_3,C_7,C_8,C_5 组成的；用 $\tilde{\alpha}_3$ 表示 C_3 与 C_7 所成的外角．用 $\tilde{\alpha}_5$ 表示 C_5 与 C_1 所成的外角，则有

$$\alpha_3+\alpha_6=\pi+\tilde{\alpha}_3, \qquad \alpha_4+\alpha_5=\pi+\tilde{\alpha}_5, \tag{9}$$

所以将区域 D_1,D_2 的 Gauss-Bonnet 公式（8）相加得到

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_7+C_8+C_5} \kappa_g \mathrm{d}s + \iint_{D_1+D_2} K\mathrm{d}\sigma$$

$$= 4\pi - \sum_{i=1}^{8}\alpha_i$$

$$=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\tilde{\alpha}_3+\alpha_7+\alpha_8+\tilde{\alpha}_5), \tag{10}$$

此即关于区域 D_1+D_2 的 Gauss-Bonnet 公式（8）．将各小块逐块并合起来，最后得到（8）式对于整个区域 D 是成立的．证毕．

如果 C 是由测地线段组成的分段光滑的简单闭曲线，它包围了曲面上一个单连通区域 D，则称 C 是曲面上的测地多边形．特别是当 C 由三段测地线组成的时候，称 C 是测地三角形．对于测地多边形，由于 $\kappa_g=0$，所以由（8）式有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i= 2\pi - \iint_D K\mathrm{d}\sigma, \tag{11}$$

对于测地三角形，上式可以进一步写成

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3= \pi + \iint_D K\mathrm{d}\sigma, \tag{12}$$

其中 β_i 是测地三角形的内角，$\beta_i=\pi-\alpha_i$.

若 C 是常曲率 K 的曲面上的测地三角形，则（12）式成为

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\pi+K\cdot A(D), \tag{13}$$

其中 $A(D)$ 表示区域 D 的面积．当 $K>0$ 时，$\beta_1+\beta_2+\beta_3>\pi$；当 $K<0$ 时，$\beta_1+\beta_2+\beta_3<\pi$，而且

$$|(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\pi|=|K|\cdot A(D).$$

由此可见，所谓欧氏几何与非欧几何的分野，从微分几何角度来看，在于“空间”的曲率是否为零.

公式 (13) 在 $K\equiv1$ 的情形，是球面三角学中熟知的公式，并且能够很简单地得到证明. 后来，Gauss 把 (13) 式推广到曲面上任意一个测地三角形的情形. 接着 Bonnet 又把 Gauss 的公式推广到曲面上任意一个曲线多边形的情形. Gauss-Bonnet 公式在整个（紧致的）曲面上的推广成为

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S), \tag{14}$$

其中 $\chi(S)$ 是曲面 S 的 Euler 示性数. 它的意义在于把曲面的拓扑不变量和微分几何的不变量（Gauss 曲率）联系了起来，把全局的量和局部的量联系了起来. 我们知道 Gauss 曲率 K 在曲面的保长变换下是不变的，然而在非保长的变换下一般是要改变的. 但是 (14) 式说明，积分 $\iint_S K d\sigma$ 与曲面的第一基本形式无关，它在曲面 S 的同胚映射下是不变的. 公式 (14) 在高维情形的推广是现代微分几何学发展的一个原动力.

最后我们用 Gauss-Bonnet 公式来研究曲面上的切向量沿闭曲线平行移动一周所产生的转角，再次说明 Gauss 曲率在产生这种转角时起到了本质的作用.

假定曲线 C 围成单连通区域 D，它被正交参数系 (u,v) 所复盖，因而曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = E du^2 + G dv^2. \tag{15}$$

命

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v, \tag{16}$$

则 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 是曲面上的单位正交切标架场. 设曲线 C 的方程是 $u=u(s)$，$v=v(s)$；$X(s)$ 是沿曲线 C 平行的单位切向量场，于是可命

$$X(s)=\cos\varphi(s)\cdot\boldsymbol{a}_1(u(s),v(s))$$
$$+\sin\varphi(s)\cdot\boldsymbol{a}_2(u(s),v(s)),\qquad(17)$$

这里 $\varphi(s)$ 就是切向量 $X(s)$ 与 u- 曲线所成的方向角. 由于 X 的平行性，故有

$$0=\frac{DX(s)}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}\ (-\sin\varphi\boldsymbol{a}_1+\cos\varphi\boldsymbol{a}_2)$$
$$+\cos\varphi\frac{D\boldsymbol{a}_1}{ds}+\sin\varphi\frac{D\boldsymbol{a}_2}{ds}.$$

因此

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(\sin\varphi\boldsymbol{a}_1-\cos\varphi\boldsymbol{a}_2\right)\cdot\left(\cos\varphi\frac{D\boldsymbol{a}_1}{ds}+\sin\varphi\frac{D\boldsymbol{a}_2}{ds}\right)$$
$$=-\frac{D\boldsymbol{a}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{a}_2.\qquad(18)$$

另一方面，用 $\boldsymbol{e}_1$ 记曲线 C 的单位切向量，命 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1$，即 $\boldsymbol{e}_2$ 是将 $\boldsymbol{e}_1$ 按正向旋转90°所得到的单位切向量. 用 θ 表示 $\boldsymbol{e}_1$ 与 u-曲线所成的方向角. 于是

$$\boldsymbol{e}_1=\cos\theta\boldsymbol{a}_1+\sin\theta\boldsymbol{a}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2=-\sin\theta\boldsymbol{a}_1+\cos\theta\boldsymbol{a}_2.$$

由§5的（18）式得到

$$\kappa_g=\frac{D\boldsymbol{e}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{d\theta}{ds}+\frac{D\boldsymbol{a}_1}{ds}\cdot\boldsymbol{a}_2.\qquad(19)$$

比较（18），（19）两式得到

$$\frac{d\theta}{ds}-\kappa_g=\frac{d\varphi}{ds}.\qquad(20)$$

分别取 θ 和 φ 的连续分支，将（20）式在曲线 C 上积分，则得

$$\begin{aligned}\varphi(l)-\varphi(0) &= \oint_C \mathrm{d}\varphi \\ &= \oint_C \mathrm{d}\theta - \oint_C \kappa_g \mathrm{d}s \\ &= 2\pi - \oint_C \kappa_g \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

其中 l 是曲线 C 的弧长，利用 Gauss-Bonnet 公式 (6) 得到

$$\varphi(l)-\varphi(0)=\iint_D K\mathrm{d}\sigma, \tag{21}$$

因此，当单位切向量 X 绕简单闭曲线 C 平行移动一周回到原处时所转过的角度恰好是曲面的 Gauss 曲率在曲线 C 所围的单连通区域上的积分．注意，(21) 式在 C 是分段光滑曲线的情形也成立，但是 C 所围的必须是曲面上的单连通区域．

第七章　活动标架和外微分法

在前面各章，我们已经对于曲线和曲面的局部性质作了比较充分的讨论．本章要介绍活动标架和外微分法，一方面是介绍近代微分几何的一种重要的研究工具，另一方面也对曲面的局部理论作一个系统的总结，从而提高我们对于曲面理论的认识．

通过前面的讨论，我们已经体会到附属于曲面的标架场的重要性．只是与曲线论的情形不同，在讨论曲面的时候只用曲面的自然标架场，它不是由曲面内在确定的，而是与曲面上参数的选择有关，但是这种标架是通过曲面的参数方程的直接求导、再通过代数运算得到的，因而用起来是方便的．一个自然的想法是，在研究曲面论时也应该用正交标架．但是，一般说来，曲面上的正交标架场不可能是曲面在某个参数系下的自然标架场．即使我们在曲面上取正交的曲率线网作为参数曲线网，也只能保证所得自然标架的正交性．由此看来，如果我们在曲面上取正交标架场，则这种标架场与参数系只能保持松弛的关系，并且这种标架可以差一个转动（所谓活动标架的含义即在于此）．曲面上的几何量可以用正交标架来表示，但是应该与标架场的选取无关．于是我们考虑的不只是沿参数曲线方向的导数，而是沿曲面上任意一个方向的微分，所以要研究曲面上正交标架场的微分的公式，需要学习所谓外微分的运算．

活动标架和外微分法是大几何学家 E. Cartan 发扬光大的，现在已成为研究微分几何的有力工具．我们在这里只初步介绍外微分法的理论，重点在于它在曲面的局部理论中的应用．

§1 外 形 式

本节作一些代数上的准备，介绍外形式和外代数的概念．设 V 是 n 维向量空间，在其中取定一个基底 $\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$，则空间 V 中的任意一个元素 x 就能够唯一地表示成 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 的线性组合，设

$$x = x^1\delta_1 + \cdots + x^n\delta_n = x^i\delta_i, \tag{1}$$

右端用了 Einstein 的和式约定．在本节我们规定所有指标 i, j,k,l 的取值范围是从 1 到 n 的所有整数．实数 $x^1,\cdots,x^n$ 称为向量 x 在基底 $\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 下的分量．

设 $f:V\to \boldsymbol{R}$是 V 上的实函数．如果对于任意的 $x,y\in V$ 及 $\alpha\in\boldsymbol{R}$总是有

$$\begin{aligned} &f(x+y)=f(x)+f(y),\\ &f(\alpha\cdot x)=\alpha\cdot f(x), \end{aligned}\tag{2}$$

则称 f 是向量空间 V 上的（实）线性函数．在固定的基底 $\{\delta_i\}$ 下，取向量 x 的第 j 个分量给出了 V 上的一个线性函数，我们把这个函数记作 δ^j，即

$$\delta^j(x)=x^j. \tag{3}$$

特别是，

$$\delta^j(\delta_i)=\delta^j_i=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{4}$$

很明显，V上的两个线性函数之和仍是V上的一个线性函数；一个线性函数与实数的乘积也是一个线性函数，因此空间V上的全体线性函数的集合构成一个向量空间，记作 V^*，称为V的**对偶空间**.我们要说明，前面所定义的n个线性函数 $\delta^1,\cdots,\delta^n$ 恰好构成V^*的一个基底，因而 V^* 是 n 维向量空间．实际上，对于任意的 $f\in V^*$，以及任意的 $x=x^i\delta_i\in V$，我们有

$$f(x)=f(x^i\delta_i)=x^if(\delta_i),$$

命

$$f(\delta_i)=f_i,\tag{5}$$

于是

$$f(x)=f_ix^i=f_i\delta^i(x),\quad \forall x\in V,$$

故有

$$f=f_i\delta^i,\tag{6}$$

这说明 f 是 $\delta^1,\cdots,\delta^n$ 的线性组合．容易证明，函数 $\delta^1,\cdots,\delta^n$ 是线性无关的．实际上，若有实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$\alpha_1\delta^1+\cdots+\alpha_n\delta^n=0,$$

则将上述函数在每一个 δ_i 求值，便得到

$$0=\alpha_j\delta^j(\delta_i)=\alpha_j\delta^j_i=\alpha_i,\qquad \forall i,$$

所以 $\delta^1,\cdots,\delta^n$ 是线性无关的，它们构成了空间 V^* 的一个基底，称为与 $\{\delta_i\}$ 对偶的基底．V 上的线性函数也称为一次形式，或 1-形式．

同样，我们可以考虑 V 上的多重线性函数．如果一个 r 元的实函数 $f:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r\text{个}}\to\mathbf{R}$ 对于每一个自变量而言都是线性函数，则称 f 是 r 重线性函数．V 上全体 r 重线性函数的集合（记作 $(V^*)^r$ 或 V_r）自然成为一个向量空间，也就是加法和数乘法在空间 V_r 中是封闭的．另外，两个多重线性函数还能作称为张量积的乘法．设 $f\in V_r$，$g\in V_s$，则它们的张量积 $f\otimes g$ 是 $(r+s)$ 重线性函数，它的定义为

$$\begin{aligned}&f\otimes g(x_1,\cdots,x_{r+s})\\&\quad=f(x_1,\cdots,x_r)\cdot g(x_{r+1},\cdots,x_{r+s}),\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $x_1,\cdots,x_{r+s}\in V$．容易验证，张量积具有结合律，即：如果 f,g,h 是三个多重线性函数，则有

$$(f\otimes g)\otimes h=f\otimes(g\otimes h).\tag{8}$$

因此 r 个线性函数的张量积便成为一个 r 重线性函数，于是利用 V^* 中的对偶基底 $\{\delta^1,\cdots,\delta^n\}$，我们可以构造 n^r 个 r 重线

性函数 $\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}$，它们的定义是

$$\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}(x_1,\cdots,x_r)=x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r}. \tag{9}$$

我们断言：$\{\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}; 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n\}$ 构成了空间 V_r 的基底，因此 $\dim V_r=n^r$. 实际上，如果 $f\in V_r$，$x_1,\cdots,x_r\in V$，则

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_r)&=f(x_1^{i_1}\delta_{i_1},\cdots,x_r^{i_r}\delta_{i_r})\\&=x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r}f(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r})\\&=f_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}(x_1,\cdots,x_r),\end{aligned}$$

其中

$$f_{i_1\cdots i_r}=f(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}), \tag{10}$$

所以

$$f=f_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}. \tag{11}$$

$\{\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}; 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n\}$ 的线性无关性留给读者自证.

如果 $f\in V_r$，并且在将 f 的任意两个自变量交换位置时 f 的值便反号，则称 f 是反对称的 r 重线性函数，或称 f 是 **r 次外形式**，简称为 **r-形式**. 很明显，如果 σ 是 $1,\cdots,r$ 的任意一个置换，则有

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)})=\text{sign}\sigma\cdot f(x_1,\cdots,x_r), \tag{12}$$

其中 $\text{sign}\sigma$ 是 σ 的符号，即：当 σ 是偶置换时，$\text{sign}\sigma=+1$；当 σ 是奇置换时，$\text{sign}\sigma=-1$. r 次外形式的最简单的例子就是行列式.

例1 设 $x_1,\cdots,x_r$ 是 V 中的任意 r 个元素，它们在基底 $\{\delta_i\}$ 下的分量为

$$x_1=(x_1^1,x_1^2,\cdots,x_1^n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_r=(x_r^1,x_r^2,\cdots,x_r^n).$$

任意取定 $i_1,\cdots,i_r$，命

$$\Delta^{i_1\cdots i_r}=\begin{vmatrix}x_1^{i_1}&\cdots&x_1^{i_r}\\\cdots&\cdots&\cdots\\x_r^{i_1}&\cdots&x_r^{i_r}\end{vmatrix}, \tag{13}$$

则行列式 $\Delta^{i_1\cdots i_r}$ 对每一行都是线性的，并且交换两行的位置，行列式的值便会变号，因此 $\Delta^{i_1\cdots i_r}$ 是 $x_1,\cdots,x_r$ 的反对称 r 重线性函数，即 $\Delta^{i_1\cdots i_r}$ 是 V 上的一个 r 次外形式.

下面我们要证明，任意一个 r 次外形式都是上面的行列式函数的线性组合．为此我们先叙述反对称化和外积运算两个概念.

反对称化是将任意一个 r 重线性函数变成 r 次外形式的运算．例如，设 f 是 2 重线性函数，将 f 的反对称化记作 $[f]$，定义如下：

$$[f](x,y)=\frac{1}{2}\ (f(x,y)-f(y,x)),\qquad \forall x,y\in V.$$

一般地，如果 f 是 r 重线性函数，则它的**反对称化** $[f]$ 定义为

$$[f](x_1,\cdots,x_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{F}_r}\operatorname{sign}\sigma\cdot f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)}),\quad (14)$$

其中 $\mathfrak{F}_r$ 是 $\{1,\cdots,r\}$ 的置换群．容易证明 $[f]$ 是一个 r 次外形式，并且当 f 本身是 r 次外形式时有 $[f]=f$.

全体 r 次外形式的集合记作 $\Lambda^r V^*$，它自然也是一个向量空间，因为加法和数乘法在集合 $\Lambda^r V^*$ 中显然是封闭的．要紧的是，利用张量积和反对称化运算可以定义两个 r 次外形式的乘积，这种乘积称为外积.

定义 设 $f\in\Lambda^r V^*$，$g\in\Lambda^s V^*$，则 f 和 g 的**外积**（记作 $f\wedge g$）是一个 $(r+s)$ 次外形式，它的定义是

$$f\wedge g=\frac{(r+s)!}{r!s!}\ [f\otimes g].\qquad (15)$$

例 2 设 f,g 是两个一次形式，则 $f\wedge g$ 是一个 2 次外形式．对于任意的 $x,y\in V$，我们有

$$\begin{aligned}f\wedge g(x,y)&=2[f\otimes g](x,y)\\&=f\otimes g(x,y)-f\otimes g(y,x)\end{aligned}$$

$$=f(x)g(y)-f(y)g(x)$$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}.$$

定理1 外积运算$\wedge$满足下列运算法则：

(i) 分配律： $(f_1+f_2)\wedge g=f_1\wedge g+f_2\wedge g$；

(ii) 反交换律：设 $f\in\Lambda^r V^*$, $g\in\Lambda^s V^*$，则

$$f\wedge g=(-1)^{rs}g\wedge f;$$

(iii) 结合律： $(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)$.

证明 (i) 是明显的. 对于 (ii)，取 $x_1,\cdots,x_{r+s}\in V$，则

$f\wedge g(x_1,\cdots,x_{r+s})$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}}\operatorname{sign}\sigma\cdot f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)})\cdot g(x_{\sigma(r+1)},\cdots,x_{\sigma(r+s)})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\cdot\operatorname{sign}\begin{pmatrix} s+1 & \cdots & s+r & 1 & \cdots & s \\ 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \end{pmatrix}$$

$$\times\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}}\operatorname{sign}\sigma\cdot g(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(s)})$$

$$\times f(x_{\sigma(s+1)},\cdots,x_{\sigma(s+r)})$$

$$=(-1)^{rs}g\wedge f(x_1,\cdots,x_{r+s}).$$

至于 (iii)，只要证明：对于 $f\in\Lambda^r V^*$, $g\in\Lambda^s V^*$, $h\in\Lambda^t V^*$ 有

$$(f\wedge g)\wedge h=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}[f\otimes g\otimes h],$$

$$f\wedge(g\wedge h)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}[f\otimes g\otimes h]. \tag{16}$$

这两式的证明留给读者完成.

由反交换律知道，如果 f,g 是一次形式，则有

$$f\wedge g=-g\wedge f. \tag{17}$$

这个事实从例 2 直接得到证实. 因此

$$f\wedge f=0. \tag{18}$$

如果 f 和 g 中至少有一个是偶次形式，则有

$$f\wedge g=g\wedge f.$$

从 (16) 式得到，如果 $f^1,\cdots,f^r\in V^*$，则 $f^1\wedge\cdots\wedge f^r$ 是 r 次外形式，并且它在 $x_1,\cdots,x_r\in V$ 上的值是

$$\begin{aligned}
&f^1\wedge\cdots\wedge f^r(x_1,\cdots,x_r)\\
&=r!\,[f^1\otimes\cdots\otimes f^r](x_1,\cdots,x_r)\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sign}\sigma\ f^1(x_{\sigma(1)})\cdots f^r(x_{\sigma(r)})\\
&=\begin{vmatrix} f^1(x_1) & \cdots & f^1(x_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f^r(x_1) & \cdots & f^r(x_r)\end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{19}$$

特别地，任意取定 r 个基底元素 $\delta^{i_1},\cdots,\delta^{i_r}$，则得

$$\begin{aligned}
&\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(x_1,\cdots,x_r)\\
&=\begin{vmatrix} \delta^{i_1}(x_1) & \cdots & \delta^{i_1}(x_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta^{i_r}(x_1) & \cdots & \delta^{i_r}(x_r)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_r^{i_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{i_r} & \cdots & x_r^{i_r}\end{vmatrix}\\
&=\Delta^{i_1\cdots i_r}(x_1,\cdots,x_r),
\end{aligned}$$

因此，例 1 给出的行列式函数 $\Delta^{i_1\cdots i_r}$ 恰好就是 $\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}$. 若取 V 中的任意 r 个基底元素 $\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}$，则有

$$\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_r})$$

$$=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_r}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \delta^{i_r}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r}\end{vmatrix} \tag{20}$$

$$=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$$

$$=\begin{cases}+1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_r \text{ 互不相同，且 } j_1,\cdots,j_r \\ & \text{是 } i_1,\cdots,i_r \text{ 的偶排列;}\\ -1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_r \text{ 互不相同，且 } j_1,\cdots,j_r\\ & \text{是 } i_1,\cdots,i_r \text{ 的奇排列;}\\ 0, & \text{其余情形.}\end{cases}$$

我们称 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 为广义的 Kronecker δ-记号.

根据反交换律（ii），在一次形式的乘积 $f^1\wedge\cdots\wedge f^r$ 中，交换其中任意两个因子的位置必定改号，因此对于 $\sigma\in\mathfrak{S}$，有

$$f^{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge f^{\sigma(r)}=\mathrm{sign}\sigma\cdot f^1\wedge\cdots\wedge f^r. \tag{21}$$

同理有

$$\delta^{i_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_{\sigma(r)}}=\mathrm{sign}\sigma\cdot\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}$$
$$=\delta^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}_{i_1\cdots i_r}\cdot\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r} \tag{22}$$

（注意：这里 $i_1,\cdots,i_r$ 不是求和指标）；因此我们有

$$\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r}=\frac{1}{r!}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}\ \delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}$$

（这里 $i_1,\cdots,i_r$ 是求和指标）.

定理2 设 $\{\delta^i\}$ 是对偶空间 V^* 中的一个基底，则 $\{\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}; 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 构成空间 $\Lambda^r V^*(r\leqslant n)$ 的一个基底，因此，$\dim\Lambda^r V^*=C^r_n$. 当$r>n$ 时，$\Lambda^r V^*=0$.

证明 设 $f\in\Lambda^r V^*$. f 作为 r 重线性函数，我们有（见（11）式）

$$f=f_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r},$$

其中

$$f_{i_1\cdots i_r}=f(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}).$$

由于 f 是反对称的，所以 $f_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标是反对称的，并且

$$
\begin{aligned}
f &= [f] = f_{i_1\cdots i_r}[\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}] \\
&= \frac{1}{r!}\ f_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r} \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_r} \frac{1}{r!} f_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r} \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_r} f_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r},
\end{aligned} \tag{23}
$$

这说明 f 能够表成 $\{\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r}:1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n\}$ 的线性组合. 要证明这 C_n^r 个 r 次外形式是线性无关的，假定 (23) 式为零；将这个线性组合在 $\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}(i_1<\cdots<i_r)$ 上求值，由 (20) 式得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j_1<\cdots<j_r} f_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r}(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}) \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_r} f_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r} = f_{i_1\cdots i_r}.
\end{aligned}
$$

因此，若组合式 (23) 为零，则它的所有的系数必须为零. 证毕.

上面的构造可以从代数上进行抽象. 假定 V 是任意一个 n 维向量空间，它的一个基底记为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$. 我们把 $x_1,\cdots,x_n$ 看作 n 个字母，构造实系数多项式，只是要求字母之间的乘法是外积，也就是任意两个字母之间的乘法适合反交换律：

$$
x_i\wedge x_j = -x_j\wedge x_i; \tag{24}
$$

多个字母的乘法适合结合律. 这样的多项式称为**外多项式**. 由于 $x_i\wedge x_i=-x_i\wedge x_i$，故 $x_i\wedge x_i=0$，所以在外多项式的每一项中不会包含两个以上的相同字母，高于 n 次的外多项式必定是零. 这样，零次多项式是实数；1 次多项式是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合，它们构成空间 V 本身；2 次多项式是

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\wedge x_j,
$$

它们构成的空间记作 $\Lambda^2 V$. 一般地， k 次外多项式是

$$\sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1\cdots i_k} x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}.$$

为规范化起见，要求 $a_{i_1\cdots i_k}$ 关于下指标是反对称的，于是

$$\sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1\cdots i_k} x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$$

$$=k!\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k} x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}.$$

全体 k 次外多项式的空间记作 $\Lambda^k V$. 全体外多项式的集合记作

$$\Lambda(V)=\sum_{k=0}^{n}\Lambda^k V, \tag{25}$$

其元素就是各次外多项式的形式和. 这样，在 $\Lambda(V)$ 中有加法和外积运算，并且外积运算适合分配律、结合律、反交换律. 所以 $\Lambda(V)$ 是一个实系数结合代数，称为**外代数**.

按这种看法，空间 V 上的外形式就是对偶空间 V^* 中对偶基底 $\delta^1,\cdots,\delta^n$ 的外多项式，但是在前面对于外形式的外积是具体构造出来的，不是形式定义的. 因此 V 上的外形式的理论是外多项式理论的一个具体例子.

最后我们叙述一个定理，它在微分几何中是十分有用的.

定理 3 （Cartan 引理） 设 $\omega^1,\cdots,\omega^r$, $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 是 n 维向量空间 V 上的 $2r$ 个一次形式，其中 $\omega^1,\cdots,\omega^r$ 是线性无关的，并且满足等式

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\omega^\alpha\wedge\theta_\alpha=0, \tag{26}$$

则 θ_α 必定是 $\omega^1,\cdots,\omega^r$ 的线性组合，即

$$\theta_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}\omega^\beta, \tag{27}$$

并且系数 $a_{\alpha\beta}$ 是对称的，即 $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$.

证明 因为 $\omega^1,\cdots,\omega^r$ 是线性无关的，所以它可以扩充成对

偶空间 V^* 中的一个基底 $\{\omega^1, \cdots, \omega^r, \omega^{r+1}, \cdots, \omega^n\}$. 因此可命

$$\theta_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}\omega^i. \tag{28}$$

注意到空间 $\Lambda^2 V^*$ 的基底是 $\{\omega^i \wedge \omega^j; 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. 将 (28) 式代入 (26) 式得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sum_{\eta=r+1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} a_{\alpha\eta}\omega^\alpha \wedge \omega^\eta \\ &= \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant r} (a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha})\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sum_{\eta=r+1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{r} a_{\alpha\eta}\omega^\alpha \wedge \omega^\eta, \end{aligned}$$

所以

$$a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} = 0, \qquad a_{\alpha\eta} = 0.$$

定理得证.

习　题

1. 设 $\{\delta^i\}$ 是空间 V^* 中的一个基底，证明：$\delta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{i_r}$，$1 \leqslant i_1, \cdots, i_r \leqslant n$ 是线性无关的.

2. 设 $f \in \Lambda^r V^*$，$g \in \Lambda^s V^*$，$h \in \Lambda^t V^*$. 证明：

$$(f \wedge g) \wedge h = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}[f \otimes g \otimes h].$$

3. 假定 f 是向量空间 V 上的 3 重线性函数，根据定义写出 $[f](x_1, x_2, x_3)$ 的表达式，其中 $x_1, x_2, x_3 \in V$.

4. 假定 $f \in \Lambda^2 V^*$，$g \in V^*$，写出$[f \otimes g](x_1, x_2, x_3)$ 的表达式，其中 $x_1, x_2, x_3 \in V$.

5. 设 $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 是 3 维向量空间 V 的基底，$\wedge$是空间 V 中的外积. 命

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\delta_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

证明：

$$y_1\wedge y_2\wedge y_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\delta_1\wedge\delta_2\wedge\delta_3.$$

6. 设 $f=a\delta^2\wedge\delta^3+b\delta^3\wedge\delta^1+c\delta^1\wedge\delta^2$，其中 a,b,c 是不全为零的实数. 试把 f 表示成两个1-形式的外积.

§2 外 微 分

设D是 n 个变量 $u^1,\cdots,u^n$ 的区域. 我们知道，$u^1,\cdots,u^n$ 的微分 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 是一组独立于 $u^1,\cdots,u^n$ 的 n 个变量. 系数为 $u^1,\cdots,u^n$ 的函数、微分 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 的 r 次外多项式称为定义在 D 上的 **r 次外微分式**. 换言之，区域D 上的 r 次外微分式φ就是指如下的表达式：

$$\varphi=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\varphi_{i_1\cdots i_r}(u^1,\cdots,u^n)\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}(u^1,\cdots,u^n)\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r},\qquad(1)$$

在最后一式中假定了 $\varphi_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标 $i_1,\cdots,i_r$ 是反对称的，并且采用了 Einstein 和式约定，指标 $i_1,\cdots,i_r$ 取从 1 到 n 的整数值.

对于每一组固定的值 $(u^1,\cdots,u^n)$，φ 成为 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 的r次外形式，所以 r 次外微分式φ就是区域 D 上的一个 r 次外形式场.

对于曲面的情形，自变量 u^1，u^2 的微分 $\mathrm{d}u^1$，$\mathrm{d}u^2$ 有明确的几何解释，即 $\{\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2\}$ 是曲面在每一点的切空间的对偶基底. 说具体一点，设曲面的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，其中 $(u^1,u^2)\in D\subset E^2$，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_\alpha\mathrm{d}u^\alpha.$$

在第三章我们已经指出，$\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 是曲面在点 (u^1,u^2) 的切空间

的自然基底，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可以代表曲面在点 (u^1,u^2) 的任意一个切向量，所以 $\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2$ 恰好是切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 下的分量，或者说是曲面的切空间上在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 下的坐标函数．根据 § 1 的说法，$\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2$ 是属于曲面在点(u,v)的切空间的对偶空间的元素，并且构成了与 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 对偶的基底．我们称切空间的对偶空间为**余切空间**，其元素称为**余切向量**．由此可见，区域 D 上的一次微分式$\varphi=\varphi_\alpha(u^1,u^2)\mathrm{d}u^\alpha$ 在曲面上的每一点给出了一个余切向量，也就是在该点切空间上的一个线性函数；区域 D 上的 2 次微分式 $\varphi=\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}(u^1,u^2)\mathrm{d}u^\alpha\wedge\mathrm{d}u^\beta$ 在曲面上的每一点给出了在该点切空间上的一个反对称双线性函数，所以φ就是曲面上的 2 次外形式场．

现在我们观察 E^3 中的曲纹坐标．在 E^3 中取定笛卡儿坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，其中任意一点$P$的坐标记作$(x,y,z)$，即

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

设D是变量 (u,v,w) 的区域．设有从区域D到 E^3 内的可微映射$\boldsymbol{r}$：$D\to E^3$，记成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v,w). \tag{2}$$

用坐标表示就是

$$\begin{cases} x=f(u,v,w),\\ y=g(u,v,w),\\ z=h(u,v,w). \end{cases} \tag{3}$$

如果映射 $\boldsymbol{r}$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}\neq 0, \tag{4}$$

则由反函数定理，u,v,w 在局部上可以表示为 x,y,z 的函数．换言之，(u,v,w)可以作为 E^3 中某个区域内的坐标，称为**E^3中的曲纹坐标**．

和曲面论的讨论一样，我们可以考虑 E^3 中的 u-曲线，v- 曲线和 w-曲线，它们构成 E^3 中的参数曲线网．在空间 E^3 中的每一点，参数曲线网确定了一个自然标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w\}$．这样，在空间中就有一个**自然标架场**，而在各点的标架一般说来不再是彼此合同的，也就是说这是空间E^3中的一个仿射标架场．自然标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w\}$ 给出了空间 E^3 在点 $\boldsymbol{r}$ 的切空间的一个基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w\}$．尽管 E^3 在点 $\boldsymbol{r}$ 的切空间可以和与 E^3 相伴随的向量空间等同起来，但是在曲纹坐标系下切空间有自己的自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w\}$．将 $\boldsymbol{r}(u,v,w)$ 微分得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v+\boldsymbol{r}_w\mathrm{d}w, \tag{5}$$

因此在任意一个固定点 (u,v,w)，$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}w$ 恰好是切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w\}$ 下的分量；这样，从该点的切空间上来看，$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}w$ 是切向量关于自然基底的坐标函数，因而是切空间上的1-形式，而且构成切空间的对偶空间（即余切空间）的基底．所以D上的一个外微分式就是 E^3 中的一个外形式场，即在每一点它是在该点切空间上的一个反对称多重线性函数．

对于变量 $u^1,\cdots,u^n$ 的区域 D，我们同样能够定义D在每一点的切向量和切空间的概念，从而 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 仍旧可以解释为切空间上的坐标函数．在这里我们不妨直接考虑由 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 生成的向量空间，称为 D 在各点的余切空间，因此 §1 最后所叙述的抽象外代数可以用到D在每一点的余切空间上去．与前面所述的关于曲面以及空间 E^3 的情形一样，自变量 $u^1,\cdots,u^n$ 的微分 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^n$ 生成的向量空间恰好是在各点的相应切空间的对偶空间，因此在概念上是清楚的，不会引起混淆．

区域D内的变量可以作适当替换．若有一组可微函数

$$u^i=u^i(v^1,\cdots,v^n),\qquad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{6}$$

并且满足

$$\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n)}{\partial(v^1,\cdots,v^n)}\neq 0, \tag{7}$$

则称(6)为区域D内容许的变量替换.

区域D上的两个外微分式可以作逐点的加法和外积运算. 对于外微分式来说，更要紧的一种运算是外微分，它把一个r次外微分式变为一个$(r+1)$次外微分式.

定义 设$\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$是区域$D$上的一个$r$次外微分式，命

$$
\begin{aligned}
d\varphi&=\frac{1}{r!}d\varphi_{i_1\cdots i_r}\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}\\
&=\frac{1}{r!}\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i}du^i\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r},\qquad(8)
\end{aligned}
$$

称$d\varphi$为φ的**外微分**. 若φ是D上的零次微分式（即D上的一个实函数），则$d\varphi$就是φ的普通微分.

从定义可知$d\varphi$是$(r+1)$次外微分式. 若记

$$
d\varphi=\frac{1}{(r+1)!}(d\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_{r+1}},
$$

其中$(d\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}$对于下指标是反对称的，则有

$$
(d\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}=\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots\hat{i}_\alpha\cdots i_{r+1}}}{\partial u^{i_\alpha}},\qquad(9)
$$

其中$\hat{i}_\alpha$表示把指标i_α去掉.

例1 设(u,v,w)是E^3中的曲纹坐标系，命

$$
\begin{aligned}
\omega&=\alpha(u,v,w)du+\beta(u,v,w)dv+\gamma(u,v,w)dw,\\
\xi&=P(u,v,w)dv\wedge dw+Q(u,v,w)dw\wedge du\\
&\quad+R(u,v,w)du\wedge dv,
\end{aligned}
$$

其中$\alpha,\beta,\gamma,P,Q,R$都是$u,v,w$的可微函数，则

$$d\omega = d\alpha\wedge du + d\beta\wedge dv + d\gamma\wedge dw$$
$$= \left(\frac{\partial\gamma}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial w}\right)dv\wedge dw + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial w} - \frac{\partial\gamma}{\partial u}\right)dw\wedge du$$
$$+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)du\wedge dv,$$

$$d\xi = dP\wedge dv\wedge dw + dQ\wedge dw\wedge du + dR\wedge du\wedge dv$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial w}\right)du\wedge dv\wedge dw.$$

定理 1 外微分运算 d 遵从下面的运算法则：

(i) d 是线性算子，即对于外微分式 φ_1, φ_2 有

$$d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2.$$

(ii) $d\circ d = 0$，即任意一个外微分式 φ 的两次外微分的结果是零.

(iii) 若 φ 是 r 次外微分式，则对于任意的 s 次外微分式 ψ 有

$$d(\varphi\wedge\psi) = d\varphi\wedge\psi + (-1)^r\varphi\wedge d\psi. \tag{10}$$

证明 (i) 是明显的.

(ii) 由外微分 d 的定义得到

$$d\varphi = \frac{1}{r!}\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i}du^i\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r},$$

$$d(d\varphi) = \frac{1}{r!}\frac{\partial^2\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i\partial u^j}du^j\wedge du^i\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$$
$$= \frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i\partial u^j} - \frac{\partial^2\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^j\partial u^i}\right)du^j$$
$$\wedge du^i\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$$
$$= 0.$$

最后一个等号成立是因为 $\varphi_{i_1\cdots i_r}$ 是连续可微函数，故有

$$\frac{\partial^2\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i\partial u^j} = \frac{\partial^2\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^j\partial u^i}.$$

(iii) 由于 d 是线性算子，不妨假设

$$\varphi=a\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r},$$

$$\psi=b\mathrm{d}u^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{j_s},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varphi\wedge\psi)&=\mathrm{d}(ab\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}\wedge\mathrm{d}u^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{j_s})\\&=(\mathrm{d}a\cdot b+a\cdot\mathrm{d}b)\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}\wedge\mathrm{d}u^{j_1}\\&\quad\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{j_s}\\&=(\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r})\wedge(b\mathrm{d}u^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{j_s})\\&\quad+(-1)^r(a\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r})\wedge(\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}u^{j_1}\\&\quad\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{j_s})\\&=\mathrm{d}\varphi\wedge\psi+(-1)^r\varphi\wedge\mathrm{d}\psi.\end{aligned}$$

性质(iii)有两个特殊情形需要特别强调一下．若 f 是定义在D上的可微函数，则由 (iii) 得到

$$\mathrm{d}(f\cdot\varphi)=\mathrm{d}f\wedge\varphi+f\mathrm{d}\varphi. \tag{11}$$

如果 φ 是一次微分式，则有

$$\mathrm{d}(\varphi\wedge\psi)=\mathrm{d}\varphi\wedge\psi-\varphi\wedge\mathrm{d}\psi. \tag{12}$$

例 1 (续) 在例 1 中，把 (α,β,γ) 看作定义在D上的一个向量场，则 (α,β,γ) 的旋量 rot (α,β,γ) 是向量场

$$(P,Q,R)\equiv\left(\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial w},\ \frac{\partial\alpha}{\partial w}-\frac{\partial\gamma}{\partial u},\ \frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right),$$

因此(α,β,γ)得到它的旋量的过程恰好是从ω求它的外微分$\mathrm{d}\omega$．另外，向量场(P,Q,R)的散度是

$$\mathrm{div}(P,Q,R)=\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}+\frac{\partial R}{\partial w},$$

它恰好对应于从ξ求其外微分的过程．现在 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}\omega=0$，这相当于 $\mathrm{div}\circ\mathrm{rot}\ (\alpha,\beta,\gamma)=0$.

外微分运算还有一个更重要的性质，也就是外微分 d 与外微

分式的参数表示是无关的，这是微积分学中“一次微分的形式不变性”的推广．更确切地说，我们有下面的定理．

定理 2 设 $\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$ 是变量 $(u^1,\cdots,u^n)$ 的区域 D 上的一个 r 次外微分式．在变量替换 (6) 下，φ 有另一个表达式：

$$\varphi=\frac{1}{r!}\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r}dv^{j_1}\wedge\cdots\wedge dv^{j_r},$$

则有

$$d\varphi_{i_1\cdots i_r}\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}=d\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r}\wedge dv^{j_1}\wedge\cdots\wedge dv^{j_r},$$

换言之，φ 的外微分 $d\varphi$ 与 φ 用哪一组变量来表示无关．

证明 由于 $u^i=u^i(v^1,\cdots,v^n)$，所以

$$du^i=\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\cdot dv^j.$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r}&dv^{j_1}\wedge\cdots\wedge dv^{j_r}\\&=\varphi_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}\\&=\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}dv^{j_1}\wedge\cdots\wedge dv^{j_r}.\end{aligned}$$

注意到 $\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}$ 对于下指标 $j_1,\cdots,j_r$ 仍是反对称的，故有

$$\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r}=\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}.$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r} &= \frac{\partial}{\partial v^j}\left(\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}\right)\mathrm{d}v^j \\
&=\left(\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial u^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}\right. \\
&\quad+\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial^2 u^{i_1}}{\partial v^{j_1}\partial v^j}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}} \\
&\quad\left.+\cdots+\varphi_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial^2 u^{i_r}}{\partial v^{j_r}\partial v^j}\right)\mathrm{d}v^j,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\tilde{\varphi}_{j_1\cdots j_r}\wedge\mathrm{d}v^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}v^{j_r} \\
&=\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{j_r}}\mathrm{d}v^j\wedge\mathrm{d}v^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}v^{j_r} \\
&=\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots i_r}}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r} \\
&=\mathrm{d}\varphi_{i_1\cdots i_r}\wedge\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}.
\end{aligned}
$$

注记 实质上，定理 2 可以从定理 1 的三条运算法则直接得到．定理 2 的曲线网实际意义是：如果我们考虑 E^3 中一个曲面 S，它不能用一个参数系覆盖住，那么 S 上的一个外微分式就不可能有一个统一的表达式．然而定理 2 表明，外微分 d 却是作用在 S 上的外微分式上的完全确定的算子．尽管在不同的参数系下，外微分式有不同的表达式，但是它们的外微分仍旧是同一个外微分式在相应参数系下的表达式．

定理 2 还可以作一些推广，这在下面十分有用．设有变量 $v^1,\cdots,v^m$ 的区域$\tilde{D}$，且 σ： $\tilde{D}\to D$ 是一个可微映射，即我们有 n 个可微函数

$$
u^i=u^i(v^1,\cdots,v^m),\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{13}
$$

则 σ 诱导出一个映射 σ^*，它把 D 上的外微分式变成$\tilde{D}$上的外微分式．若 φ 是 D 上的一个 r 次外微分式，其表达式为

$$
\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}(u^1,\cdots,u^n)\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}, \tag{14}
$$

则 $\sigma^*\varphi$ 就是将上式中的 u^i 用函数$u^i(v^1,\cdots,v^m)$ 代入的结果，即

$$\sigma^*\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}(u^1(v^1,\cdots,v^m),\cdots,u^n(v^1,\cdots,v^m))$$

$$\cdot\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{\alpha_r}}dv^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dv^{\alpha_r}. \tag{15}$$

我们称 $\sigma^*\varphi$ 为 D 上的外微分式 φ 通过映射 σ 拉回到 $\tilde{D}$ 上的外微分式.

定理 3 若 $\sigma: \tilde{D}\to D$ 是可微映射，则对D上的任意的外微分式 φ,ψ 有以下的等式：

(i) $\sigma^*(\varphi+\psi)=\sigma^*\varphi+\sigma^*\psi$;

(ii) $\sigma^*(\varphi\wedge\psi)=\sigma^*\varphi\wedge\sigma^*\psi$;

(iii) $\sigma^*(d\varphi)=d(\sigma^*\varphi)$.

证明 性质 (i) 和(ii)可以从映射 σ^* 的定义直接得到. 性质 (iii) 的证明实际上和定理 2 的证明是一样的.

把微积分学中的重积分的被积表达式写成外微分式是更为自然的. 这样，积分的变量替换公式是自动导出的. 例如考虑二维区域上的重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$,这里的 $dxdy$ 应该理解成$dx\wedge dy$.

若有变量替换

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),$$

则

$$dx\wedge dy=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}du\wedge dv$$

$$=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

上式正是重积分的变量替换公式．关于三重积分，情况是类似的．

采用外微分的语言，积分的 Green 公式、Stokes 公式和 Gauss 公式可以统一地表述如下：设 G 是 E^n 中一个 p 维曲面上的一个区域，∂G 是 G 的边界，ω 是定义在 G 上的 $p-1$ 次外微分式，则有

$$\int_{\partial G}\omega=\int_G \mathrm{d}\omega. \tag{16}$$

上式统称为 Stokes 公式，在此不给证明了．

例 2 (i) 设 $n=p=2$，命

$$\omega=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

公式 (16) 就是

$$\int_{\partial G}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

这正是 Green 公式．

(ii) 设 $n=3$，$p=2$，命

$$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

则公式 (16) 成为

$$\int_{\partial G} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_G\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

此即通常的 Stokes 公式.

(iii) 设 $n=p=3$, 则 Gauss 公式就是

$$\iint_{\partial G} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

习　题

1. 设 $\varphi=yz\mathrm{d}x+\mathrm{d}z$, $\psi=\sin z\mathrm{d}x+\cos z\mathrm{d}y$, $\xi=\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$, 计算: (i) $\varphi\wedge\psi$, $\psi\wedge\xi$, $\xi\wedge\varphi$; (ii) $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\psi$, $\mathrm{d}\xi$.

2. 设 f,g 是两个光滑函数, 化简:

(i) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f)$;

(ii) $\mathrm{d}[(f-g)(\mathrm{d}f+\mathrm{d}g)]$;

(iii) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}g\wedge g\mathrm{d}f)$;

(iv) $\mathrm{d}(gf\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(f\mathrm{d}g)$.

3. 假定 u,v,w 是 p,q,r 的函数. 证明:

$$\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(p,q,r)}\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}r.$$

4. 设

$$\varphi=\frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_r},$$

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{(r+1)!}\ (\mathrm{d}\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{i_{r+1}},$$

其中 $\varphi_{i_1\cdots i_r}$，$(\mathrm{d}\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}$ 关于下指标都是反对称的．证明：

$$(\mathrm{d}\varphi)_{i_1\cdots i_{r+1}}=\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\frac{\partial\varphi_{i_1\cdots\hat{i}_\alpha\cdots i_{r+1}}}{\partial u^{i_\alpha}}.$$

5．设 $E(u,v)$，$F(u,v)$，$G(u,v)$ 是曲面的第一类基本量．引进新参数 $\tilde{u},\tilde{v}$，使得

$$\tilde{u}=\tilde{u}(u,v),$$
$$\tilde{v}=\tilde{v}(u,v),$$

证明：

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\,\mathrm{d}\tilde{u}\wedge\mathrm{d}\tilde{v}=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

6．设 (r,φ,θ) 是 E^3 中的球坐标系，即

$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\quad y=r\cos\theta\sin\varphi,\quad z=r\sin\theta,$$

(i) 求相应的自然标架场．

(ii) 将 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 用球坐标系表示出来．

7．设 (r,θ,t) 是 E^3 中的柱坐标系，即

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=t.$$

(i) 求相应的自然标架场．

(ii) 将 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 用柱坐标系表示出来．

8．设 D 是 (u,v)-平面，命 σ：$D\to E^3$，定义如下：

$$\begin{cases} x=\dfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \\[2ex] y=\dfrac{2v}{1+u^2+v^2}, \\[2ex] z=\dfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}. \end{cases}$$

假定

$$\omega=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z,$$
$$\xi=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

求：(i) $\sigma^*\omega$；(ii) $\sigma^*\xi$；(iii) $\sigma^*(\mathrm{d}\xi)$．

§3 E^3中的标架族

在第一章§1我们已经专门讨论过 E^3 中全体标架所组成的空间. 在 E^3 中取定一个右手单位正交标架 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 那么 E^3 中任何一个右手标架 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 可以表示成:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OP} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

并且行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0. \tag{2}$$

因此 E^3 中全体(右手)标架的集合组成 $\boldsymbol{R}^{12}$ 中的区域D, 满足条件 (2) 的, (1)式中的系数矩阵正是标架 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的坐标.

如果 $\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是右手单位正交标架, 则还要求

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}, \quad 1\leqslant i,j\leqslant 3,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

在 (3) 中包含了 6 个独立方程, 所以 E^3 中全体 (右手) 正交标架的集合组成了 $\boldsymbol{R}^{12}$ 中一个 6 维曲面.

由于 $\mathrm{d}(\overrightarrow{OP})$, $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i$ 仍然是空间 E^3 中的向量, 所以它们可以用基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 线性表示:

$$\begin{cases} \mathrm{d}(\overrightarrow{OP}) = \Omega^1\boldsymbol{e}_1 + \Omega^2\boldsymbol{e}_2 + \Omega^3\boldsymbol{e}_3, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \Omega_i^1\boldsymbol{e}_1 + \Omega_i^2\boldsymbol{e}_2 + \Omega_i^3\boldsymbol{e}_3. \end{cases} \tag{4}$$

这里，Ω^i,Ω_i^j 都是区域 D 上的一次微分式．实际上，由（1）式得到

$$\begin{pmatrix} d(\overrightarrow{OP}) \\ d\boldsymbol{e}_1 \\ d\boldsymbol{e}_2 \\ d\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 & da_2 & da_3 \\ da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

然而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 反过来可以表示成 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中（b_{ij}）是（a_{ij}）的逆矩阵，即它们满足条件

$$\sum_{k=1}^{3} b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}. \tag{7}$$

将（6）代入（5），并与（4）比较，得到

$$\Omega^i = \sum_{j=1}^{3} da_j \cdot b_{ji}, \tag{8}$$

$$\Omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} da_{ik} \cdot b_{kj}.$$

我们把 D 上的12个一次微分式 Ω^i，Ω_i^j 称为 E^3 上的标架空间的**相对分量**．

上面的讨论对于 E^3 上的正交标架空间也是适用的，只是现在（a_{ij}）是正交矩阵，所以由（7）得到

$$b_{ij} = a_{ji},$$

所以正交标架空间的相对分量是

$$\begin{cases} \Omega^i = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}da_j, \\ \Omega_i^j = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}da_{ik}. \end{cases} \tag{9}$$

由于条件（3），我们有

$$\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0, \tag{10}$$

所以正交标架空间的相对分量实质上只有六个，即：$\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$，$\Omega_1^2, \Omega_1^3, \Omega_2^3$；它们是 R^{12} 中某个6维曲面上的一次微分式，或者是（8）式中给出的一次微分式在条件（3）的限制下所得到的微分式.

定理1 E^3 中全体标架所构成的空间的相对分量 Ω^i，Ω_i^j 满足下列方程式：

$$\begin{cases} d\Omega^i = \sum_{j=1}^{3} \Omega^j \wedge \Omega_j^i, \\ d\Omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \Omega_i^k \wedge \Omega_k^j. \end{cases} \tag{11}$$

这组方程称为标架空间的**结构方程**.

证明 注意，在（1）式中，$\overrightarrow{OP}$ 相当于 (a_1, a_2, a_3)，e_i 相当于 (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})，所以它们实际上就是标架空间中的12个坐标函数. 根据外微分 d 的性质（ii）得到

$$d(d(\overrightarrow{OP})) = 0, \quad d(de_i) = 0, \tag{12}$$

将(12)式用于(4)式得到

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\sum_{i=1}^{3} \Omega^i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (d\Omega^i e_i - \Omega^i \wedge de_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(d\Omega^i - \sum_{j=1}^{3} \Omega^j \wedge \Omega_j^i\right) e_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\sum_{j=1}^{3} \Omega_i^j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} (d\Omega_i^j e_j - \Omega_i^j \wedge de_j) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(d\Omega_i^j - \sum_{k=1}^{3} \Omega_i^k \wedge \Omega_k^j\right) e_j. \end{aligned}$$

由于 e_1,e_2,e_3 的线性无关性，故得上式的系数为零. 证毕.

正交标架空间的相对分量同样也满足结构方程（11）. 这时，微分式 Ω_i^j 关于指标 i,j 有反对称性（见（10）式），所以结构方程成为

$$\begin{cases} d\Omega^i=\sum_{j=1}^{3}\Omega^j\wedge\Omega_j^i, \\ d\Omega_1^2=\Omega_1^3\wedge\Omega_3^2=-\Omega_1^3\wedge\Omega_2^3, \\ d\Omega_1^3=\Omega_1^2\wedge\Omega_2^3, \\ d\Omega_2^3=\Omega_2^1\wedge\Omega_1^3=\Omega_1^3\wedge\Omega_1^2. \end{cases} \tag{13}$$

所谓 E^3 中依赖 r 个参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的一个标架族是指从变量（$u^1,\cdots,u^r$）的区域 $\widetilde{D}$ 到标架空间 D 的一个可微映射 σ：$\widetilde{D}\to D$，换言之我们有一组函数：

$$\begin{cases} a_i=a_i(u^\alpha), \\ a_{ij}=a_{ij}(u^\alpha), \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\det(a_{ij}(u^\alpha))>0$. 将 $u^1,\cdots,u^r$ 看作自变量，考虑微分 $d(\overrightarrow{OP})$，de_i，其中 $\overrightarrow{OP}$，e_i 是将（14）代入（1）式得到的函数. 因为 $\{e_i(u^1,\cdots,u^r)\}$ 是处处线性无关的，故可设

$$d(\overrightarrow{OP})=\sum_{i=1}^{3}\omega^i e_i,$$

$$de_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j e_j, \tag{15}$$

其中 ω^i，ω_i^j 是区域 $\widetilde{D}$ 上的一次微分式，称为这个依赖 r 个参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的**标架族的相对分量**. 很明显，我们有

$$\begin{aligned} \omega^i&=\sigma^*\Omega^i, \\ \omega_i^j&=\sigma^*\Omega_i^j, \end{aligned} \tag{16}$$

即 ω^i,ω_i^j 分别是将（14）式代入（9）式所得到的结果.

如果（14）式中的函数 $a_{ij}(u^1,\cdots,u^r)$ 满足条件（3），即

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij},$$

则我们得到的是 E^3 中依赖 r 个参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的正交标架族，它的相对分量 ω^i，ω_i^j 满足条件

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0. \tag{17}$$

利用§2的定理 3，立即可以知道 E^3 中依赖 r 个参数的标架族的相对分量仍然满足结构方程（11）．

定理 2　对于 E^3 中任意一个连续可微地依赖 r 个参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的标架族 $\{P(u^\alpha);e_1(u^\alpha),e_2(u^\alpha),e_3(u^\alpha)\}$，其相对分量 ω^i，ω_i^j 必定满足结构方程

$$\begin{cases} d\omega^i=\sum\limits_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i, \\ d\omega_i^j=\sum\limits_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j. \end{cases} \tag{18}$$

证明　实际上$\omega^i=\sigma^*\Omega^i$，$\omega_i^j=\sigma^*\Omega_i^j$，所以

$$\begin{aligned} d\omega^i&=d(\sigma^*\Omega^i)=\sigma^*(d\Omega^i) \\ &=\sigma^*\left(\sum_{j=1}^{3}\Omega^j\wedge\Omega_j^i\right)=\sum_{j=1}^{3}\sigma^*\Omega^j\wedge\sigma^*\Omega_j^i \\ &=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i. \end{aligned}$$

第二式的证明是类似的．

结构方程的重要性在于上述定理的逆定理也成立，即结构方程是标架族赖以存在的充分条件；具体地说，我们有下面的定理：

定理 3　任意给定自变量 $u^1,\cdots,u^r$ 的12个一次微分式 ω^i，ω_i^j，$1\leqslant i,j\leqslant 3$，如果它们适合结构方程

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i,$$

$$d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j,$$

则在 E^3 中存在一族依赖参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的右手标架以 ω^i,ω_i^j 为它的相对分量.

定理3′ 如果给定了依赖变量 $u^1,\cdots,u^r$ 的一次微分式 ω^i, ω_i^j,满足条件 $\omega_i^j+\omega_j^i=0$, 并且适合结构方程

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i,$$

$$d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j,$$

则在 E^3 中存在依赖参数 $u^1,\cdots,u^r$ 的右手正交标架族以 ω^i,ω_i^j 为相对分量, 并且任意两个这样的正交标架族可以通过 E^3 的一个刚体运动彼此重合.

定理 3 和定理3′的证明实际上可以化为第五章证明曲面存在定理时所提到过的一阶偏微分方程组的求解问题, 而结构方程相当于这组偏微分方程的可积条件. 详细的证明过程可参看附录§2.

例1 设 P 是 E^3 中的一个固定点, 所有以 P 为原点的右手正交标架构成依赖三个参数的正交标架族, 它在拓扑上等价于 $SO(3)$. 从 E^3 中全体正交标架的空间中看, 上述正交标架族满足条件

$$a_i=\text{常数},\quad 1\leqslant i\leqslant 3.$$

因此它的相对分量是

$$\begin{aligned}&\omega^1=\omega^2=\omega^3=0,\\&\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}a_{jk}da_{ik},\end{aligned}\tag{19}$$

其中a_{ij}满足条件$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$.

例2 设C是空间 E^3 中的一条有挠曲线, 方程为$r=r(s)$,

曲率为 κ，挠率为 τ，其中 s 是弧长参数．那么曲线的 Frenet 标架场 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 是 E^3 中的单参数正交标架族，它的相对分量是

$$\begin{cases} \omega^1 = \mathrm{d}s, \quad \omega^2 = \omega^3 = 0, \\ \omega_1^2 = \kappa \mathrm{d}s, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = \tau \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{20}$$

如果考虑 E^3 中所有这样的正交标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，使得 $\boldsymbol{e}_1$ 是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的切向量，于是 $\{\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$ 比较可以差一个任意的旋转，因此

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}(s), \\ \boldsymbol{e}_2 = \cos\theta\boldsymbol{\beta}(s) + \sin\theta\boldsymbol{\gamma}(s), \\ \boldsymbol{e}_3 = -\sin\theta\boldsymbol{\beta}(s) + \cos\theta\boldsymbol{\gamma}(s). \end{cases} \tag{21}$$

所以这是一个依赖参数 s,θ 的正交标架族，它的相对分量是

$$\begin{cases} \omega^1 = \mathrm{d}s, \quad \omega^2 = \omega^3 = 0, \\ \omega_1^2 = \kappa\cos\theta \mathrm{d}s, \quad \omega_1^3 = -\kappa\sin\theta\mathrm{d}s, \quad \omega_2^3 = \mathrm{d}\theta + \tau \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{22}$$

例 3 E^3 中球坐标系给出的自然标架场和相应的正交标架场．设 (r,φ,θ) 是 E^3 中的球坐标系，故

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta. \end{cases}$$

它所给出的自然标架场是 $\left\{\boldsymbol{r};\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right\}$，其中

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = (-r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

很明显，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$是彼此正交的，并且成右手系．因此相应的正交标架场$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$如下所示：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta),$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right|=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0),$$

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|=(-\sin\theta\cos\varphi,-\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta).$$

微分 $\boldsymbol{r}$ 得到

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{r}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}dr+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}d\theta\\&=dr\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta d\varphi\boldsymbol{e}_2+rd\theta\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}\omega^1=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1=dr,\\ \omega^2=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_2=r\cos\theta d\varphi,\\ \omega^3=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_3=rd\theta.\end{cases}\tag{23}$$

同理可得

$$\begin{cases}\omega_1^2=-\omega_2^1=d\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\theta d\varphi,\\ \omega_1^3=-\omega_3^1=d\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=d\theta,\\ \omega_2^3=-\omega_3^2=d\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\sin\theta d\varphi.\end{cases}\tag{24}$$

习　题

1．求柱坐标系在 E^3 中所建立的正交标架场，并且求它的相对分量．

2．设 C 是 Oxy 平面上以 O 为圆心、以 R 为半径的圆周，在点集 $U=E^3-\{z轴\}$ 中引进如下的参数系 (ρ,θ,ψ)，使得

$$\begin{cases} x=(R+\rho\cos\psi)\cos\theta, \\ y=(R+\rho\cos\psi)\sin\theta, \\ z=\rho\sin\psi. \end{cases}$$

证明上面给出的参数曲线网是正交网；在 U 上建立正交标架场 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，使得 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别是 ρ-曲线，θ-曲线，ψ-曲线的切方向，求这个标架场的相对分量.

3. 设 f 是定义在 E^3 上的可微函数，设

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, 1, -\cos f),$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, -1, -\cos f),$$

$$\boldsymbol{e}_3=(-\cos f, 0, -\sin f).$$

验证：$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是 E^3 中的正交标架场，并求它的相对分量.

§4 曲面上的标架场

本节的目的是把 E^3 中标架族的理论用于曲面论的研究．首先我们求曲面上自然标架场的相对分量，然后把曲面论的 Gauss-Codazzi 方程和自然标架场的结构方程等同起来.

设 E^3 中曲面 S 的方程是$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，曲面上的自然标架场是 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$，其中

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}, \quad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}. \tag{1}$$

因此，自然标架场 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$ 是空间 E^3 中依赖参数 u^1,u^2 的标架族．现在求这个标架族的相对分量 ω^i,ω_i^j．假定曲面的两个基本形式分别是

$$\begin{aligned} \mathrm{I}&=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta, \\ \mathrm{II}&=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta. \end{aligned} \tag{2}$$

由于

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1 du^1+\boldsymbol{r}_2 du^2,$$

与相对分量 ω^i 的定义对照，得到

$$\omega^1=du^1,\qquad \omega^2=du^2,\qquad \omega^3=0. \tag{3}$$

由曲面论的基本公式得到

$$d\boldsymbol{r}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta$$

$$=\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}du^\beta \boldsymbol{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}du^\beta \boldsymbol{n},$$

$$d\boldsymbol{n}=\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\beta}du^\beta=-b^\gamma_\beta du^\beta \boldsymbol{r}_\gamma,$$

所以

$$\begin{cases}\omega^\gamma_\alpha=\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}du^\beta,\\ \omega^3_\alpha=b_{\alpha\beta}du^\beta,\\ \omega^\gamma_3=-b_\beta{}^\gamma du^\beta,\\ \omega^3_3=0.\end{cases} \tag{4}$$

根据定义，我们知道 $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$ 关于下指标 α,β 是对称的，因此第一组结构方程

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega^i_j$$

是自动成立的．现在我们来考察第二组结构方程，这组方程可以写成：

$$\begin{cases}d\omega^\gamma_\alpha=\omega^\beta_\alpha\wedge\omega^\gamma_\beta+\omega^3_\alpha\wedge\omega^\gamma_3,\\ d\omega^3_\alpha=\omega^\beta_\alpha\wedge\omega^3_\beta,\\ d\omega^\gamma_3=\omega^\beta_3\wedge\omega^\gamma_\beta,\\ 0=d\omega^3_3=\omega^\beta_3\wedge\omega^3_\beta.\end{cases} \tag{5}$$

上面的第四式是明显的恒等式，而第三式是与第二式等价的，因此有意义的是第一、第二两式．

直接计算得到

$$d\omega^\gamma_\alpha=d(\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}du^\beta)=\frac{\partial\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}du^\delta\wedge du^\beta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}}-\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}\right)\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta},$$

$$\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\gamma}=(\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\delta}\mathrm{d}u^{\delta})\wedge(\Gamma^{\gamma}{}_{\xi\beta}\mathrm{d}u^{\beta})$$

$$=\frac{1}{2}(\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\delta}\Gamma^{\gamma}{}_{\xi\beta}-\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\xi\delta})\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta},$$

所以

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha}^{\gamma}-\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\gamma}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}}-\frac{\partial \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\xi\delta}-\Gamma^{\xi}{}_{\alpha\delta}\Gamma^{\gamma}{}_{\xi\beta}\right)\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}$$

$$=\frac{1}{2}R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\delta}\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}=-\frac{1}{2}R^{\gamma}{}_{\alpha\delta\beta}\,\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}. \tag{6}$$

在另一方面，

$$\omega_{\alpha}^{3}\wedge\omega_{3}^{\gamma}=(b_{\alpha\delta}\mathrm{d}u^{\delta})\wedge(-b_{\beta}^{\gamma}\mathrm{d}u^{\beta})$$

$$=\frac{1}{2}(b_{\alpha\beta}b_{\delta}^{\gamma}-b_{\alpha\delta}b_{\beta}^{\gamma})\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}.$$

因此

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha}^{\gamma}-\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\gamma}-\omega_{\alpha}^{3}\wedge\omega_{3}^{\gamma}$$

$$=-\frac{1}{2}(R^{\gamma}{}_{\alpha\delta\beta}+b_{\alpha\beta}b_{\delta}^{\gamma}-b_{\alpha\delta}b_{\beta}^{\gamma})\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}$$

$$=-\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\;[R_{\xi\alpha\delta\beta}+(b_{\xi\delta}b_{\alpha\beta}-b_{\xi\beta}b_{\alpha\delta})]\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta}.$$

这说明，结构方程(5)的第一式就是 Gauss 方程

$$R_{\xi\alpha\delta\beta}=-(b_{\xi\delta}b_{\alpha\beta}-b_{\xi\beta}b_{\alpha\delta}). \tag{7}$$

将 ω_{α}^{3} 外微分得到

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha}^{3}=\mathrm{d}(b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^{\beta})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}}-\frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}\right)\mathrm{d}u^{\delta}\wedge\mathrm{d}u^{\beta},$$

另外

$$\omega_\alpha^\beta\wedge\omega_\beta^3=(\Gamma^\beta{}_{\alpha\delta}\mathrm{d}u^\delta)\wedge(b_{\beta\gamma}\mathrm{d}u^\gamma)$$
$$=\Gamma^\xi{}_{\alpha\delta}b_{\xi\beta}\mathrm{d}u^\delta\wedge\mathrm{d}u^\beta$$
$$=\frac{1}{2}(\Gamma^\xi{}_{\alpha\delta}b_{\xi\beta}-\Gamma^\xi{}_{\alpha\beta}b_{\xi\delta})\ \mathrm{d}u^\delta\wedge\mathrm{d}u^\beta.$$

所以结构方程（5）的第二式就是 Codazzi 方程

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}-\frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta}=\Gamma^\xi{}_{\alpha\delta}b_{\xi\beta}-\Gamma^\xi{}_{\alpha\beta}b_{\xi\delta}. \tag{8}$$

由此可见，若要验证已知的两个二次微分形式

$$\varphi=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,$$
$$\psi=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$$

（其中φ是正定的）是否满足 Gauss-Codazzi 方程，只要按照（3），（4）两式构造一次微分式 ω^i，ω_i^j，然后验证 ω^i，ω_i^j 是否满足结构方程就行了．由于结构方程比 Gauss-Codazzi 方程容易记忆，所以验证结构方程显然是比较方便的．

下面我们讨论曲面上的正交标架场．首先我们要指出从自然标架场得到正交标架场的最简单的方法是所谓的 Schmidt 正交化步骤．假定曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,$$

则从 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 经过 Schmidt 正交化得到

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u+\sqrt{E}\,\boldsymbol{r}_v\right),$$

（参看第三章§4的最后一段）．命 $g=EG-F^2$，则上式用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{E}} & 0\\ -\frac{F}{\sqrt{Eg}} & \sqrt{\frac{E}{g}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}. \tag{9}$$

命

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}.$$

现在 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 是定义在曲面上的正交标架场，其中 e_1,e_2 为曲面的切向量，它是 E^3 中依赖两个参数 u^1,u^2 的正交标架族.为求相对分量 ω^i，注意到 dr 是曲面的切向量，所以

$$\omega^3 = dr\cdot e_3 = 0.$$

此外，由定义得到

$$\begin{aligned} dr &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ &= (\omega^1,\omega^2)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ -\dfrac{F}{\sqrt{E}g} & \dfrac{\sqrt{E}}{\sqrt{g}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \\ &= (du,dv)\cdot\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$(du,dv) = (\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ -\dfrac{F}{\sqrt{E}g} & \dfrac{\sqrt{E}}{\sqrt{g}} \end{pmatrix},$$

$$(\omega^1,\omega^2) = (du,dv)\begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ \dfrac{F}{\sqrt{E}} & \dfrac{\sqrt{g}}{\sqrt{E}} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \omega^1 = \sqrt{E}\,du + \dfrac{F}{\sqrt{E}}dv, \\ \omega^2 = \dfrac{\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dv. \end{cases} \tag{10}$$

容易看出，从 (du,dv) 得到 (ω^1,ω^2) 的过程恰好是将第一基本形式写成平方和的过程：

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$=\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F}{\sqrt{E}}dv\right)^2+\frac{EG-F^2}{E}\,dv^2$$

$$=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

实际上，如果我们取曲面上的正交标架场 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$，使得 e_1,e_2 为曲面的切向量（以后，我们把这样的标架场称为曲面上的**一阶标架场**），假定它的相对分量为 $\omega^1,\omega^2,\omega^3=0$，则必有

$$\mathrm{I}=dr\cdot dr=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

反过来，我们只要将 I 作配方，写成两个一次微分形式的平方和的形式，则所得的一次微分式 $\omega^1,\omega^2,\omega^3=0$ 必定是某个一阶标架场的相对分量．我们在讨论过程中实际上只需要微分式 ω^1,ω^2，不必把标架向量 e_1,e_2 具体地写出来，因此上面的观察在实践中是很有用的．例如：如果我们将 I 作如下的配方：

$$\mathrm{I}=\frac{EG-F^2}{G}\,du^2+\left(\sqrt{G}\,dv+\frac{F}{\sqrt{G}}du\right)^2,$$

则得

$$(\omega^1,\omega^2)=(du,dv)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} & \frac{F}{\sqrt{G}}\\ 0 & \sqrt{G}\end{pmatrix},\tag{11}$$

那么相应的 e_1,e_2 由下式决定：

$$\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} & \frac{F}{\sqrt{G}}\\ 0 & \sqrt{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} & -\frac{F}{\sqrt{Gg}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}.\tag{12}$$

现在假定我们有曲面上的一个一阶正交标架场 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$，换言之，有一次微分式 $\omega^1,\omega^2,\omega^3=0$ 使得

$$\mathrm{I}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

首先我们断言：一次微分式 $\omega_1^2=-\omega_2^1$ 由 ω^1,ω^2 根据结构方程唯一确定．更确切地说，我们有下面的定理：

定理 1　假定 ω^1,ω^2 是变量 u,v 的两个处处线性无关的一次微分式，则存在唯一的一个一次微分式 $\omega_1^2=-\omega_2^1$ 满足条件：

$$\begin{cases} d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1, \\ d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2. \end{cases} \tag{13}$$

证明　从（13）式可知 ω_1^2 只能是 u,v 的微分式；因为 ω^1，ω^2 处处线性无关，故可设

$$\omega_1^2=p\omega^1+q\omega^2.$$

将上式代入（13）得到

$$\begin{cases} d\omega^1=p\omega^1\wedge\omega^2, \\ d\omega^2=q\omega^1\wedge\omega^2, \end{cases}$$

其中 $d\omega^1,d\omega^2$ 都是 du,dv 的二次微分式，所以它们都是$\omega^1\wedge\omega^2$ 的倍数，这两个倍数分别就是 p,q．由此可见，ω_1^2 是由 ω^1,ω^2 根据条件（13）唯一确定的．

由于 $\omega^3=0$，所以（13）式是结构方程 $d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i$ 的组成部分；这组结构方程的另一式是

$$0=d\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3. \tag{14}$$

现在 ω^1,ω^2 是处处线性无关的，根据§1的定理 3（Cartan引理）我们有

$$\begin{cases} \omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2, \\ \omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2. \end{cases} \tag{15}$$

注意到曲面的第二基本形式是

$$\begin{aligned} \mathrm{II}&=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n} \\ &=-(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega_3^1\boldsymbol{e}_1+\omega_3^2\boldsymbol{e}_2) \\ &=\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3 \\ &=a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2, \end{aligned} \tag{16}$$

所以系数 a,b,c 不难从第二基本形式Ⅱ得到．

将上面的讨论综合起来，我们有下面的结论：如果给定曲面的第一基本形式和第二基本形式；将Ⅰ作任意一个配方，写成两个一次微分式 ω^1,ω^2 的平方和，那么 $\omega^1,\omega^2,\omega^3=0$ 一定是某个一阶标架场的相对分量；另外，相对分量 ω_1^2 是由 ω^1,ω^2 唯一确定的，ω_1^3,ω_2^3 是由第二基本形式确定的.

例1 已知曲面的第一、第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=(1+u^2)\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{II}=\frac{\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}v^2}{\sqrt{1+u^2}}.$$

求曲面上的一个一阶标架场的相对分量.

解 因为

$$\mathrm{I}=(\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u)^2+(u\mathrm{d}v)^2,$$

故可命

$$\omega^1=\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u,\qquad \omega^2=u\mathrm{d}v,\qquad \omega^3=0. \tag{17}$$

假定

$$\omega_1^2=p\mathrm{d}u+q\mathrm{d}v,$$

则

$$\mathrm{d}\omega^1=0,\quad \mathrm{d}\omega^2=\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$$

$$\begin{aligned}\omega^2\wedge\omega_2^1&=-(u\mathrm{d}v)\wedge(p\mathrm{d}u+q\mathrm{d}v)\\&=pu\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\\ \omega^1\wedge\omega_1^2&=(\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u)\wedge(p\mathrm{d}u+q\mathrm{d}v)\\&=q\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

由结构方程 $\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1$，$\mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$ 得到

$$p=0,\qquad q=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

即

$$\omega_1^2=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ \mathrm{d}v. \tag{18}$$

设

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2 = a\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u + bu\mathrm{d}v,$$
$$\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2 = b\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u + cu\mathrm{d}v,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u^2 + u^2\mathrm{d}v^2}{\sqrt{1+u^2}} &= \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 \\ &= a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 \\ &= a(1+u^2)\mathrm{d}u^2 + 2bu\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &\quad + cu^2\mathrm{d}v^2.\end{aligned}$$

所以

$$a = \frac{1}{(\sqrt{1+u^2})^3}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

即

$$\omega_1^3 = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}, \quad \omega_2^3 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}v. \tag{19}$$

注记 在用曲面的第一、第二基本形式求曲面的一个一阶标架场的相对分量时，我们只用到结构方程 $\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$，另一组结构方程 $\mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 并没有用到. 前面已经讲过这后一组方程正是曲面的 Gauss-Codazzi 方程，也就是 Ⅰ，Ⅱ 能否作为曲面的第一、第二基本形式的充分必要条件. 对于例 1，容易验证第二组结构方程是成立的.

根据绝对微分的定义，对于一阶标架场 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{e}_1 &= \omega_1^2\boldsymbol{e}_2, \\ \mathrm{D}\boldsymbol{e}_2 &= \omega_2^1\boldsymbol{e}_1.\end{aligned} \tag{20}$$

若 $X = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2$ 是曲面上的可微切向量场，则

$$\begin{aligned}\mathrm{D}X &= \mathrm{d}x^1\boldsymbol{e}_1 + x^1\mathrm{D}\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}x^2\boldsymbol{e}_2 + x^2\mathrm{D}\boldsymbol{e}_2 \\ &= (\mathrm{d}x^1 + x^2\omega_2^1)\boldsymbol{e}_1 + (\mathrm{d}x^2 + x^1\omega_1^2)\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases}\mathrm{D}x^1 = \mathrm{d}x^1 + x^2\omega_2^1, \\ \mathrm{D}x^2 = \mathrm{d}x^2 + x^1\omega_1^2.\end{cases} \tag{21}$$

定理 1 还说明了，曲面上切向量场的绝对微分与曲面的保长变换是无关的.

曲面上的一阶正交标架场的选取有相当大的随意性，因为让一阶正交标架在每一点绕法向量 e_3 转过一个角度得到的仍然是一阶正交标架. 换言之，一阶正交标架场容许如下的变换：

$$\begin{aligned} e_1^* &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \\ e_2^* &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 θ 是曲面 S 上的可微函数. 正是因为一阶标架场的选取具有这种自由度，使得它与曲面的参数系的关系比较松弛，因而为处理曲面的问题带来很多便利，此即活动标架的优越性. 当然，曲面上的几何量可以借助于曲面的一阶标架场的相对分量来表示，但是这种表示应该与一阶标架场的选取无关，即与变换(22)无关. 我们先考虑在变换(22)下，相对分量的变换规律. 用 $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_i^j$ 记一阶标架场 $\{r; e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ 的相对分量. 由 (22) 式可知，$e_3^* = e_3$, $\tilde{\omega}^3 = \omega^3 = 0$. 另外，

$$\begin{aligned} dr &= (\omega^1, \omega^2)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix} e_1^* \\ e_2^* \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$(\omega^1, \omega^2) = (\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$(\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2) = (\omega^1, \omega^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

由 (20) 式，我们有

$$\tilde{\omega}_1^2 = De_1^* \cdot e_2^*$$

$$=[(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)d\theta+\cos\theta D\boldsymbol{e}_1$$

$$+\sin\theta D\boldsymbol{e}_2]\cdot(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$=d\theta+\omega_1^2.$$

同理，因为 $\boldsymbol{e}_3^*=\boldsymbol{e}_3$，故有

$$d\boldsymbol{e}_3^*=d\boldsymbol{e}_3=(\omega_3^1,\omega_3^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$$

$$=(\tilde{\omega}_3^1,\tilde{\omega}_3^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1^*\\ \boldsymbol{e}_2^*\end{pmatrix}$$

$$=(\tilde{\omega}_3^1,\tilde{\omega}_3^2)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix},$$

因此

$$(\omega_3^1,\omega_3^2)=(\tilde{\omega}_3^1,\tilde{\omega}_3^2)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$(\tilde{\omega}_1^3,\tilde{\omega}_2^3)=(\omega_1^3,\omega_2^3)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

设

$$(\tilde{\omega}_1^3,\tilde{\omega}_2^3)=(\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{b} & \tilde{c}\end{pmatrix},$$

于是

$$(\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{b} & \tilde{c}\end{pmatrix}$$

$$=(\omega_1^3,\omega_2^3)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=(\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{b} & \tilde{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

即 ω_1^3,ω_2^3 的系数矩阵在变换（22）下经受一个相似变换（或

合同变换），其过渡矩阵就是变换（22）的矩阵．综合起来，我们有

定理 2 若曲面上的一阶标架场 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 经受如下的变换

$$\begin{pmatrix} e_1^* \\ e_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

则对应的相对分量按下列规律变换：

$$(\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2)=(\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\tilde{\omega}^3=\omega^3=0, \tag{24}$$

$$\tilde{\omega}_1^2=\omega_1^2+\mathrm{d}\theta, \tag{25}$$

$$(\tilde{\omega}_1^3,\tilde{\omega}_2^3)=(\omega_1^3,\omega_2^3)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{26}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{27}$$

根据定理 2，很容易构造出曲面上的一些不变式和不变量，它们与曲面的一阶标架场的选取无关：

(i) 二次微分形式 $(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$，$\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3$，$(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2$ 显然与曲面上一阶标架场的选取无关．实际上，它们分别是曲面上的第一、第二、第三基本形式．

(ii) $\omega^1\wedge\omega^2$ 是不变式．实际上，

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^2&=(\cos\theta\omega^1+\sin\theta\omega^2)\wedge(-\sin\theta\omega^1+\cos\theta\omega^2)\\&=\omega^1\wedge\omega^2.\end{aligned}$$

假定 $\{e_1,e_2\}$ 是从自然标架 $\{r_u,r_v\}$ 经过 Schmidt 正交化得来的，从（10）式得到

$$\begin{aligned}\omega^1\wedge\omega^2&=\left(\sqrt{E}\,\mathrm{d}u+\frac{F}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v\right)\wedge\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v\right)\\&=\sqrt{g}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{28}$$

所以 $\omega^1\wedge\omega^2$ 恰好是曲面的面积元素.

(iii) 与之相仿，$\omega_1^3\wedge\omega_2^3$，$\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3$ 都是曲面上不变的二次外微分式. 经计算得到

$$\begin{aligned}&\omega_1^3\wedge\omega_2^3=(ac-b^2)\omega^1\wedge\omega^2,\\&\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3=(a+c)\omega^1\wedge\omega^2.\end{aligned}\tag{29}$$

因此 $(ac-b^2)$，$(a+c)$ 是曲面上的不变量. 实际上它们分别是矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ 的行列式和迹，由于这个系数矩阵在一阶标架场作变换时经受的是相似变换，所以它的行列式和迹都是不变的. 在§5我们会说明 $ac-b^2=K$，$a+c=2H$.

(iv) 由 (25) 式可知

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\mathrm{d}\tilde{\omega}_1^2,$$

所以 $\mathrm{d}\omega_1^2$ 也是曲面上不变的二次外微分式. 另外，由结构方程可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1^2&=\omega_1^3\wedge\omega_3^2=-\omega_1^3\wedge\omega_2^3\\&=-(ac-b^2)\omega^1\wedge\omega^2=-K\omega^1\wedge\omega^2,\end{aligned}\tag{30}$$

因此 $K=ac-b^2=-\dfrac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$，这说明 K 是曲面上的内蕴几何量，重新获得了 Gauss 的精采的定理.

(v) $\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3$ 也是曲面上的不变的二次微分形式. 实际上由定理 2 得到

$$(\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2)=(\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\omega}_2^3\\-\tilde{\omega}_1^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2^3\\-\omega_1^3\end{pmatrix},$$

因此

$$(\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix}\tilde{\omega}_2^3\\-\tilde{\omega}_1^3\end{pmatrix}=(\omega^1,\omega^2)\begin{pmatrix}\omega_2^3\\-\omega_1^3\end{pmatrix}.$$

将 ω_1^3,ω_2^3 的表达式代入，则得

$$\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3=b(\omega^1)^2+(c-a)\omega^1\omega^2-b(\omega^2)^2. \tag{31}$$

在§5，我们会给出这个二次微分形式的几何意义.

习　题

1. 验证：在例1中由（17），（18），（19）三式给出的相对分量满足正交标架族的结构方程.

2. 设 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$ 是曲面上的自然标架场，其相对分量 ω^i,ω_i^j 如（3），（4）两式给出．证明：

(i) $dg_{\alpha\beta}=g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma+g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma$.

(ii) 命 $\omega_{\alpha\beta}=\omega_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta}$，则 $d\omega_{\alpha\beta}+\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_{\beta\gamma}=\dfrac{1}{2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}du^\gamma\wedge du^\delta$，其中 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=g_{\alpha\xi}R^\xi{}_{\beta\gamma\delta}$.

(iii) $dg^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta-g^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha$.

(iv) $d\omega_3^\alpha-\omega_3^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha=-g^{\alpha\gamma}(d\omega_\gamma^3-\omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\beta^3)$.

3. 设曲面的第一基本形式给定如下，求曲面上关于一个一阶正交标架场的相对分量 ω^1，ω^2 及 ω_1^2.

(i) $\mathrm{I}=\dfrac{1}{v^2}(du^2+dv^2)$，$v>0$；

(ii) $\mathrm{I}=\dfrac{du^2-4v\,du\,dv+4u\,dv^2}{4(u-v^2)}$ $(u>v^2)$；

(iii) $\mathrm{I}=du^2+2\cos\psi\,du\,dv+dv^2$，其中 ψ 是 u,v 的可微函数.

4. 在旋转曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,g(u))$$

上建立一阶正交标架场，并计算它的相对分量 ω^i,ω_i^j.

5. 已知曲面的两个基本形式分别为

$$\mathrm{I}=(a^2+2v^2)du^2+4uv\,du\,dv+(a^2+2u^2)dv^2,$$

$$\mathrm{II}=-\frac{2a}{\sqrt{a^2+2(u^2+v^2)}}\,du\,dv.$$

求该曲面上一个一阶标架场的相对分量 ω^i, ω_i^j，并且验证它们适合第二组结构方程.

§5 曲面上的曲线

假定在曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$上取定了一阶正交标架场 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{n}$，它的相对分量为 $\omega^1, \omega^2, \omega^3=0$ 以及 $\omega_i^j=-\omega_j^i$，它们都是 u^1, u^2 的一次微分式.

设 C 是曲面 S 上的一条曲线，其方程为 $u^\alpha=u^\alpha(s)$，$\alpha=1,2$，s 为弧长参数. 因此，曲线 C 的单位切向量是

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{\omega^1}{ds}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\omega^2}{ds}\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{1}$$

设 θ 是 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 所成的方向角，即

$$\boldsymbol{e}_1=\cos\theta\ \boldsymbol{\alpha}_1+\sin\theta\ \boldsymbol{\alpha}_2,$$

故

$$\frac{\omega^1}{ds}=\cos\theta, \quad \frac{\omega^2}{ds}=\sin\theta. \tag{2}$$

命

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1&=-\sin\theta\boldsymbol{\alpha}_1+\cos\theta\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ &=-\frac{\omega^2}{ds}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{\omega^1}{ds}\boldsymbol{\alpha}_2,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{n},$$

于是$\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是沿曲线 C 定义的一个正交标架场. 因此，曲线 C 的曲率向量是

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}&=(-\sin\theta\boldsymbol{\alpha}_1+\cos\theta\boldsymbol{\alpha}_2)\frac{d\theta}{ds}+\cos\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_1}{ds}+\sin\theta\frac{d\boldsymbol{\alpha}_2}{ds}\\ &=\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_1^{\ 2}}{ds}\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3}{ds^2}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{De_1}{ds}=\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_1^2}{ds}\right)e_2, \tag{4}$$

故曲线 C 的测地曲率是

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_1^2}{ds}, \tag{5}$$

法曲率是

$$\kappa_n=\frac{de_1}{ds}\cdot n=\frac{\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3}{ds^2}$$

$$=a\cos^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta. \tag{6}$$

另外，

$$\frac{de_2}{ds}=-(\cos\theta\alpha_1+\sin\theta\alpha_2)\frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta)\frac{d\alpha_1}{ds}+\cos\theta\frac{d\alpha_2}{ds}$$

$$=-\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_1^2}{ds}\right)e_1+\left(-\sin\theta\frac{\omega_1^3}{ds}+\cos\theta\frac{\omega_2^3}{ds}\right)e_3$$

$$=-\kappa_g e_1+\frac{\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3}{ds^2}e_3,$$

所以测地挠率是

$$\tau_g=\frac{\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3}{ds^2}, \tag{7}$$

这给出了§4最后给出的不变微分式 $\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3$ 的几何意义．特别是，根据第六章§1，曲面上曲率线的方程是

$$\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3=0. \tag{8}$$

公式（6）直接给出了法曲率 κ_n 作为方向角 θ 的函数．现在我们来考虑 κ_n 的极值性质．由（6）式得到

$$\kappa_n=a\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+b\sin2\theta+c\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\cos2\theta+b\sin2\theta.$$

若$\frac{a-c}{2}$，b 同时为零，则$\kappa_n=\frac{a+c}{2}$与方向角无关，即曲面在该点

沿各个切方向的法曲率都相同，因此该点为曲面的脐点．如果 $\frac{a-c}{2}, b$ 不同时为零，则可取 θ_0，使得

$$\cos 2\theta_0 = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}},$$
$$\sin 2\theta_0 = \frac{2b}{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}, \tag{9}$$

于是

$$\kappa_n = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2} \cdot \cos 2(\theta - \theta_0). \tag{10}$$

由此可见，κ_n 在 $\theta = \theta_0, \theta_0 + \pi$ 时达到最大值

$$\kappa_1 = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}, \tag{11}$$

在 $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{3\pi}{2}$ 时达到最小值

$$\kappa_2 = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}. \tag{12}$$

换句话说，κ_1, κ_2 是曲面的主曲率，$\theta_0 + \frac{\kappa\pi}{2}$ 是曲面的主方向，并且对应于不同主曲率的主方向是彼此正交的．另外，由(11)，(12)两式得到

$$2H = \kappa_1 + \kappa_2 = a + c,$$
$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = ac - b^2, \tag{13}$$

这证明了§4的（iii）中关于 $a+c$ 和 $ac-b^2$ 的断言．

如果我们取曲面上的正交标架 $\{r; a_1, a_2, a_3\}$，使得 a_1, a_2 分别是曲面在该点的主方向，则这样的标架称为二阶正交标架．此时，$\theta_0 = 0$，故

$$\kappa_n = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2} \cos 2\theta$$

$$=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta, \tag{14}$$

这正是关于法曲率的 Euler 公式．此外，由(9)式可知，$\theta_0=0$的充要条件是 $b=0$，所以关于二阶标架场有

$$\mathrm{II}=a(\omega^1)^2+c(\omega^2)^2, \tag{15}$$

或者

$$\omega_1^3=a\omega^1,\quad \omega_2^3=c\omega^2, \tag{16}$$

并且

$$\kappa_1=a,\quad \kappa_2=c. \tag{17}$$

根据§4的(30)式，我们有

$$d\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2,$$

$$K=-\frac{d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}. \tag{18}$$

这不仅说明了 K 是内蕴几何量，而且给出了计算 Gauss 曲率的有效途径.

例1 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=Edu^2+Gdv^2$，证明：曲面的 Gauss 曲率是

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}.$$

证明 因为

$$\mathrm{I}=(\sqrt{E}du)^2+(\sqrt{G}dv)^2,$$

故可命

$$\omega^1=\sqrt{E}\,du,\quad \omega^2=\sqrt{G}\,dv. \tag{19}$$

设

$$\omega_1^2=pdu+qdv,$$

代入结构方程

$$d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\quad d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$$

得到

$$-(\sqrt{E})_v du\wedge dv=p\sqrt{G}\,du\wedge dv,$$
$$(\sqrt{G})_u du\wedge dv=q\sqrt{E}\,du\wedge dv,$$

故有

$$p=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}, \quad q=\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}},$$

$$\omega_1^2=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v. \tag{20}$$

因此

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$$

$$\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

由公式(18)得到

$$K=-\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}.$$

如果 (u,v) 不是曲面上的正交参数系，则上面例子的证明过程中给出的计算方法仍旧是有效的．由此可见，采用活动标架法成功地解决了计算曲面的 Gauss 曲率的问题．

例 2 利用一阶标架场的理论能够很容易导出计算曲面上曲线的测地曲率的 Liouville 公式．假定曲面上的第一基本形式为 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$，曲线的方程是 $u=u(s)$，$v=v(s)$，其中 s 是弧长参数．设曲线与 u-曲线所成的方向角为 θ．取 $\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u$，$\omega^2=\sqrt{G}\mathrm{d}v$，则（参看例 1）

$$\cos\theta=\frac{\omega^1}{\mathrm{d}s}=\sqrt{E}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},$$

$$\sin\theta=\frac{\omega^2}{\mathrm{d}s}=\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

并且

$$\omega_1^2=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v.$$

由公式(5)可知曲线的测地曲率是

$$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

此即 Liouville 公式.

注意到对于曲面上任意一条曲线用 Liouville 公式去求它的测地曲率仍是十分困难的. 公式 (5) 为我们指出了一条简捷的途径：设 C 是曲面 S 上一条已知的曲线，我们取曲面上适当的一阶标架场 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，使得它限制在曲线 C 上时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 恰好是曲线 C 的切向量. 这样的一阶标架场是容易取到的. 设相应的相对分量为 ω^1,ω^2，由 §4的定理 1 可以决定 ω_1^2. 现在我们有 $\theta\equiv0$，所以由 (5) 式得到

$$\kappa_g=\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}.$$

要指出的是，在上面所叙述的方法中我们并不要求在曲面上已经取了正交参数系，这正是活动标架场与参数系的关系比较松弛的妙处.

例 3 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$，求曲线 $u+v=0$的测地曲率.

解 由于(u,v)是曲面上的正交系，故此例可以通过 Liouville 公式来求. 在这里我们采取上面所建议的办法. 首先，在曲面上引进新参数系(ξ,η)，使得曲线 $u+v=0$ 对应于曲线 $\eta=0$，为此只要命

$$\xi=\frac{1}{2}(u-v),\quad \eta=\frac{1}{2}(u+v),$$

故

$$u=\xi+\eta,\quad v=-\xi+\eta.$$

曲面的第一基本形式成为

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= (d\xi+d\eta)^2+[(\xi+\eta)^2+a^2](-d\xi+d\eta)^2\\
&=[1+a^2+(\xi+\eta)^2]d\xi^2+2[1-a^2-(\xi+\eta)^2]d\xi d\eta\\
&\quad+[1+a^2+(\xi+\eta)^2]d\eta^2\\
&=[1+a^2+(\xi+\eta)^2]\cdot\left(d\xi+\frac{1-a^2-(\xi+\eta)^2}{1+a^2+(\xi+\eta)^2}d\eta\right)^2\\
&\quad+\left[-\frac{(1-a^2-(\xi+\eta)^2)^2}{1+a^2+(\xi+\eta)^2}+1+a^2+(\xi+\eta)^2\right]d\eta^2,
\end{aligned}$$

命

$$\omega^1=\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}\,d\xi+\frac{1-a^2-(\xi+\eta)^2}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}d\eta,$$

$$\omega^2=\frac{2\sqrt{a^2+(\xi+\eta)^2}}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}d\eta.$$

此时，相应的一阶标架场中的 a_1 就成为 ξ-曲线的切向量了，所以，要求的曲线的测地曲率是

$$\kappa_g=\left.\frac{\omega_1^2}{ds}\right|_{\eta=0}.$$

不妨设 $\omega_1^2=p\,d\xi+q\,d\eta$，所以

$$\kappa_g=p\cdot\left.\frac{d\xi}{ds}\right|_{\eta=0},$$

因此我们只要求出 $p\big|_{\eta=0}$ 及 $\left.\frac{d\xi}{ds}\right|_{\eta=0}$ 即可。

对 ω^1 求外微分得到

$$\begin{aligned}
d\omega^1&=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}d(\xi+\eta)\wedge d\xi+\left\{\frac{-2(\xi+\eta)}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}\right.\\
&\quad\left.-\frac{[1-a^2-(\xi+\eta)^2]\cdot(\xi+\eta)}{(\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2})^3}\right\}d(\xi+\eta)\wedge d\eta\\
&=\left\{\frac{-3(\xi+\eta)}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}-\frac{(\xi+\eta)[1-a^2-(\xi+\eta)^2]}{(\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2})^3}\right\}d\xi\wedge d\eta.
\end{aligned}$$

又有

$$\omega^2\wedge\omega_2^1=p\cdot\frac{2\sqrt{a^2+(\xi+\eta)^2}}{\sqrt{1+a^2+(\xi+\eta)^2}}\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta,$$

故由结构方程 $\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1$ 得到

$$p\Big|_{\eta=0}=\frac{\sqrt{1+a^2+\xi^2}}{2\sqrt{a^2+\xi^2}}\cdot\left\{\frac{-3\xi}{\sqrt{1+a^2+\xi^2}}-\frac{\xi(1-a^2-\xi^2)}{(\sqrt{1+a^2+\xi^2})^3}\right\}$$

$$=\frac{-\xi(2+a^2+\xi^2)}{\sqrt{a^2+\xi^2}\,(1+a^2+\xi^2)}.$$

在曲线 $\eta=0$ 上弧长元素是

$$\mathrm{d}s^2=(1+a^2+\xi^2)\mathrm{d}\xi^2,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+\xi^2}},$$

因此曲线 $\eta=0$ 的测地曲率是

$$\kappa_g=\frac{-\xi(2+a^2+\xi^2)}{\sqrt{a^2+\xi^2}\sqrt{(1+a^2+\xi^2)^3}}$$

$$=\frac{2(v-u)(8+4a^2+(u-v)^2)}{\sqrt{4a^2+(u-v)^2}\sqrt{(4+4a^2+(u-v)^2)^3}}$$

$$=-\frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}\sqrt{(1+a^2+u^2)^3}}\ (\because u+v=0).$$

在本章我们只是对于外微分和活动标架法的基本概念作了一些介绍. 即使如此，已经可以体会到用活动标架法计算曲面的 Gauss 曲率和测地曲率是十分有效的，对于验证曲面的可积条件是非常方便的. 活动标架方法是研究大范围微分几何的重要工具，这留待以后的课程进行介绍.

习　题

1. 设曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+2\cos\psi\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\mathrm{d}v^2,$$

其中 ψ 是 u-曲线和 v-曲线的夹角. 试求：

(i) 曲面的 Gauss 曲率 K.

(ii) u-曲线和 v-曲线的测地曲率.

(iii) u-曲线和 v-曲线的二等分角轨线的测地曲率.

2. 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=\frac{a^2}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$，$v>0$. 求曲线 $u=kv+b$(k,b 是常数）的测地曲率.

3. 设C是 E^3 中一条曲线，其曲率处处不为零. 以 C 的点为圆心在法平面内作半径为 a 的圆周，这些圆周生成一个曲面，称为围绕曲线 C 的管状面. 试在管状面上建立一个一阶标架场，写出曲面的第一、第二基本形式，并求管状面的主方向和主曲率.

附　录

这个附录主要包括两部分：一部分是关于本书中所用到的微分方程组的定理，特别是一阶偏微分方程组的可积性定理．这个定理在微分方程课程中往往是被忽略的，但是在微分几何学中却有十分重要的作用，因此我们在这里叙述并证明这个定理．进而我们指出这个定理实际上与一次微分形式方程组的 Frobenius 定理是一回事．另一部分是叙述张量的概念，把本书中讲述的第一类、第二类基本量的变换规律抽象为一般的张量变换规律．这样做对于提高和加深对于几何学的理解有帮助，对于学习物理学和力学更有帮助．

§1　关于常微分方程的几个定理

在第二章证明曲线的存在定理以及在第六章讲述切向量沿曲线的平行移动时，我们都用到了下面的一阶线性齐次常微分方程组的存在、唯一性定理：

定理 1　已知常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{1}$$

其中系数 $a_{ij}(t)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数．则对于任意给定的一组实数 $x_i^0(1\leqslant i\leqslant n)$，存在唯一的一组函数 $x_i=x_i(t)$，使得每一个函数 $x_i(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续可微的，并且它们满足方程组 (1) 和初条件

$$x_i(a)=x_i^0,\quad 1\leqslant i\leqslant n.\tag{2}$$

这个定理可以采用逐次逼近法来证明.

证明 命

$$
\begin{aligned}
x_i^{(1)} &= x_i^0 + \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j^0 \mathrm{d}t, \\
x_i^{(2)} &= x_i^0 + \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j^{(1)} \mathrm{d}t, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i^{(r)} &= x_i^0 + \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j^{(r-1)} \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3}
$$

假定 $|a_{ij}(t)|$ 在区间 $[a,b]$上的上界为$\frac{1}{n}A$, $A>0$; $|x_i^0|$ 的上界为 B. 于是

$$
\begin{aligned}
|x_i^{(1)} - x_i^0| &\leqslant \int_a^t \sum_j |a_{ij}| \cdot |x_j^0| \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant AB(t-a), \\
|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| &\leqslant \int_a^t \sum_j |a_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^0| \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant A^2 B \int_a^t (t-a)\mathrm{d}t \\
&= B \cdot \frac{A^2(t-a)^2}{2},
\end{aligned}
$$

用归纳法可证

$$
|x_i^{(r)} - x_i^{(r-1)}| \leqslant B \cdot \frac{A^r(t-a)^r}{r!} \leqslant B \cdot \frac{A^r(b-a)^r}{r!}. \tag{4}
$$

很明显, 级数$\sum_{r=0}^{\infty} B \cdot \frac{A^r(b-a)^r}{r!}$是收敛的, 即$\sum_{r=0}^{\infty} B \cdot \frac{A^r(b-a)^r}{r!}$ $= B \cdot e^{A(b-a)}$, 所以对于每一个固定的 i, 级数

$$
x_i^0 + (x_i^{(1)} - x_i^0) + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \cdots + (x_i^{(r)} - x_i^{(r-1)}) + \cdots \tag{5}
$$

在区间$[a,b]$内绝对一致收敛. 然而上述级数的前 $(r+1)$ 项的和

是 $x_i^{(r)}$，因此存在区间$[a,b]$上的连续函数 $x_i(t)$使得

$$\lim_{r\to\infty} x_i^{(r)}(t) = x_i(t) \tag{6}$$

现在证明函数 $x_i(t)$，$1\leqslant i\leqslant n$，满足方程组（1）及初条件(2)．利用（3）得到

$$\begin{aligned} & x_i - x_i^0 - \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j \mathrm{d}t \\ &= (x_i - x_i^{(r)}) + (x_i^{(r)} - x_i^0) - \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j \cdot \mathrm{d}t \\ &= (x_i - x_i^{(r)}) + \int_a^t \sum_j a_{ij} (x_j^{(r-1)} - x_j) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7}$$

因为（6）式中的极限在区间$[a,b]$上是一致收敛的，故对于任给的$\varepsilon>0$，必有N，只要 $r-1\geqslant N$，则对$[a,b]$内的任意的 t 都有

$$|x_i^{(r-1)} - x_i| < \varepsilon, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

所以由（7）式得到

$$\begin{aligned} & \left| x_i - x_i^0 - \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j \mathrm{d}t \right| \\ & \leqslant |x_i - x_i^{(r)}| + \int_a^t \sum_j |a_{ij}| \cdot |x_j^{(r-1)} - x_j| \mathrm{d}t \\ & < \varepsilon + \varepsilon A(t-a) \leqslant \varepsilon[1 + A(b-a)]. \end{aligned}$$

由于ε可以任意地小，而$1+A(b-a)$是常数，所以有

$$x_i = x_i^0 + \int_a^t \sum_j a_{ij} x_j \mathrm{d}t, \tag{8}$$

因此 $x_i(t)$满足方程组（1）和初条件（2）．

假定有另一组连续函数 $\bar{x}_i(t)$ 满足方程组(1)和初条件(2)．命

$$f_i(t) = x_i(t) - \bar{x}_i(t), \tag{9}$$

则 $f_i(a)=0$，并且

$$f_i(t)=\int_a^t\sum_j a_{ij}f_j\mathrm{d}t. \tag{10}$$

不妨设 $f_i(t)$在$[a,b]$内有上界 C,则由(10)式得到

$$|f_i|\leqslant AC(t-a),$$

再次代入得到

$$|f_i|\leqslant A^2C\int_a^t(t-a)\,\mathrm{d}t=C\cdot\frac{A^2(t-a)^2}{2},$$

逐次迭代得到

$$|f_i|\leqslant C\cdot\frac{A^r(t-a)^r}{r!}\leqslant C\cdot\frac{A^r(b-a)^r}{r!}. \tag{11}$$

因为$\frac{A^r(b-a)^r}{r!}$是收敛级数$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A^r(b-a)^r}{r!}$的通项，故在 $r\to\infty$ 时，(11)式右边趋向于零，所以 $f_i\equiv0$. 证毕.

定理 2 设有一次微分式

$$f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y, \tag{12}$$

其中 $f(x,y),g(x,y)$ 是区域 $D\subset E^2$ 内的两个连续可微函数. 对于任意一点 $(x_0,y_0)\in D$, 若 $f^2(x_0,y_0)+g^2(x_0,y_0)\neq0$, 则必有 (x_0,y_0)的一个邻域 $U\subset D$, 以及定义在 U 上的函数 $\lambda(x,y)$, 使得

$$\lambda(x,y)(f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y)$$

是 U 上某个可微函数 $h(x,y)$的全微分. 换言之,在一点$(x_0,y_0)\in D$ 的某个邻域内, 方程 (12) 的积分因子是存在的.

证明 设$(x_0,y_0)\in D$, 并设 $g(x_0,y_0)\neq0$, 于是在 (x_0,y_0) 的邻域内可以考虑常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{13}$$

根据常微分方程解的存在定理①, 必有 x_0 的一个邻域 I 及 y_0

---

① 参看: G.Birkhoff and G.C.Rota, Ordinary Differential Equations, John-Wiley & Sons, 2-ed., 1969, p.174.

的一个邻域 J，使得 $I\times J\subset D$，并且对于任意的 $y_1\in J$，方程（13）有唯一解

$$y=y(x,y_1),\quad x\in I, \tag{14}$$

满足初条件

$$y(x_0,y_1)=y_1, \tag{15}$$

而且函数 $y(x,y_1)$ 对于 x,y_1 是连续可微地依赖的. 由（15）可知 $\left.\dfrac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\right|_{x=x_0}=1$，故有 x_0 的邻域 $I'\subset I$，使得

$$\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\neq 0,\quad \forall (x,y_1)\in I'\times J.$$

因此，根据反函数定理，存在函数

$$y_1=h(x,y),\quad (x,y)\in I_1\times J_1\subset I\times J \tag{16}$$

满足恒等式

$$y\equiv y(x,h(x,y)). \tag{17}$$

对（14）式求微分得到

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y(x,y_1)}{\partial x}dx+\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}dy_1 \\ &= -\frac{f(x,y(x,y_1))}{g(x,y(x,y_1))}dx+\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}dy_1, \end{aligned}$$

所以

$$dy_1=\frac{f(x,y(x,y_1))dx+g(x,y(x,y_1))dy}{\dfrac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\cdot g\,(x,y\,(x,y_1))}$$

用 $y_1=h(x,y)$ 代入上式，并且命

$$\lambda(x,y)=\frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial y_1}\,(x,h(x,y))\cdot g(x,y)}, \tag{18}$$

则在 $I_1\times J_1\subset D$ 内成立

$$dh(x,y)=\lambda(x,y)[f(x,y)dx+g(x,y)dy].$$

因此，函数 $\lambda(x,y)$是方程（12）的积分因子.

需要指出的是，定理 2 的证明依赖于常微分方程的解的存在性以及对于初始值的连续可微依赖性. 在变量个数多于 2 时，定理 2 是不成立的.

§2 一阶偏微分方程组的可积性

我们要考虑的一阶偏微分方程是

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}=f_\alpha^i(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n),\tag{1}$$

$$1\leqslant\alpha\leqslant m,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

假定 $f_\alpha^i(x^\beta;y^j)$ 是在区域 $D=\tilde{D}\times\boldsymbol{R}^n$ 内连续可微的函数，其中 $\tilde{D}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个区域.

先观察一下方程组(1)的几何意义. 由（1）得到

$$dy^i=f_\alpha^i(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n)dx^\alpha,\quad 1\leqslant i\leqslant n.\tag{2}$$

对于每一个固定的点 $(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n)$，方程组（2）给出了区域 D 在该点的切空间的一个m 维子空间，它在向因子 $\tilde{D}$ 作自然投影时与$\tilde{D}$ 在$(x^1,\cdots,x^m)$处的切空间是线性同构的. 因此，方程组（1）的几何意义是在区域 D 上定义了一个 m 维切子空间场. 很明显，方程组（1）的解 $y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m)$给出了一个 m 维曲面，它的切平面恰好属于方程组（1）给出的 m 维切子空间场. 但是这样的解不总是存在的.

定理 1 对于任意给定的初值

$$(x_0^1,\cdots,x_0^m;y_0^1,\cdots,y_0^n)\in D$$

在点$(x_0^1,\cdots,x_0^m)$的一个邻域 $U\subset\tilde{D}$内存在一组可微函数

$$y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\leqslant i\leqslant n\tag{3}$$

满足方程组（1）和初条件

$$y^i(x_0^1,\cdots,x_0^m)=y_0^i,\quad 1\leqslant i\leqslant n\tag{4}$$

的充分必要条件是：在区域 D 上成立恒等式

$$\frac{\partial f_\alpha^i}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f_\beta^i}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial f_\alpha^i}{\partial y^j}f_\beta^j-\frac{\partial f_\beta^i}{\partial y^j}f_\alpha^j=0. \tag{5}$$

并且在此时，方程组（1）在该点邻域内满足初条件（4）的解是唯一的．当 $\tilde{D}$ 是单连通的情形，函数（3）能够开拓成整个区域 $\tilde{D}$ 上的解．

证明 必要性．任取一点$(x_0^\alpha;y_0^i)\in D$，设在点(x_0^α)的邻域内有解 $y^i=y^i(x^\alpha)$满足方程组(1)和初条件(4)．很明显，由于 f_α^i 的连续可微性可知 $y^i(x^\alpha)$ 是二次以上连续可微函数，故 $y^i(x^\alpha)$ 的两次偏微商与次序无关，即

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}.$$

因此在点(x_0^α)的邻域内成立

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(f_\beta^i(x^\alpha;y^j(x^\alpha))\right)=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(f_\gamma^i(x^\alpha;y^j(x^\alpha))\right),$$

故在点$(x_0^\alpha;y_0^i)$成立

$$\frac{\partial f_\beta^i}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial f_\beta^i}{\partial y^j}f_\gamma^j=\frac{\partial f_\gamma^i}{\partial x^\beta}+\frac{\partial f_\gamma^i}{\partial y^j}f_\beta^j.$$

充分性．首先我们证明：如果方程组(1)在初条件(4)下的解是存在的，则它必是唯一的．实际上，若设 $y^i=y^i(x^\alpha)$是方程组（1）在点(x_0^α)的邻域 U 上的解，不妨假定 U 是弧连通的，于是对于任意一点$(x_1^\alpha)\in U$，必有 U 内的一条路径 $x^\alpha=x^\alpha(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，连结点(x_0^α)和(x_1^α)，即

$$x^\alpha(0)=x_0^\alpha,\quad x^\alpha(1)=x_1^\alpha. \tag{6}$$

命

$$y^i(t)=y^i(x^\alpha(t)), \tag{7}$$

则有

$$y^i(0)=y^i(x^\alpha(0))=y_0^i, \tag{8}$$

并且 $y^i(t)$满足常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}(x^\alpha(t))\frac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=f^i_\beta(x^\alpha(t);y^j(t))\frac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

若在 U 内有另一组解 $y^i=\tilde{y}^i(x^\alpha)$ 满足方程组(1)和初条件(4)，则函数 $\tilde{y}^i(t)=\tilde{y}^i(x^\alpha(t))$满足同一组方程(9)和相同的初条件(8)．由常微分方程组(9)在已知初条件 (8) 下的解的唯一性得知 $\tilde{y}^i(t)=y^i(t)$，特别是 $\tilde{y}^i(1)=y^i(1)$，即 $\tilde{y}^i(x^\alpha_1)=y^i(x^\alpha_1)$．

上面的证明启发我们考虑常微分方程组的问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=f^i_\beta(x^\alpha(t);y^i)\dfrac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t},\\ y^i(0)=y^i_0,\end{cases} \tag{10}$$

其中 $x^\alpha(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$是连结(x^α_0)和(x^α_1)的一条已知的可微路径．由于 f^i_α 的连续可微性可知，在 $(x^\alpha;y^i)$ 的一个紧致区域内，f^i_α 是有界的，并且 f^i_α 关于 y^j 满足 Lipschitz 条件．因此，利用§1关于定理 1 的同样的证明方法可以证明问题 (10) 有解 $y^i=y^i(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 困难在于 $y^i(1)$的值可能与连结(x^α_0)和(x^α_1)的路径有关．为了构造方程组 (1) 的解，我们首先证明：在条件(5)下，对于在(x^α_0)的一个单连通邻域内连结(x^α_0)和(x^α_1)的任意两条路径 $x^\alpha(t),\tilde{x}^\alpha(t)$，常微分方程问题 (10) 的解 $y^i(t)$，$\tilde{y}^i(t)$ 满足条件 $y^i(1)=\tilde{y}^i(1)$.

为此，命

$$x^\alpha(t,s)=x^\alpha(t)+s(\tilde{x}^\alpha(t)-x^\alpha(t)), \tag{11}$$

考虑常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}=f^i_\beta(x^\alpha(t,s);y^j)\dfrac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial t},\\ y^i(0)=y^i_0.\end{cases} \tag{12}$$

设它的解为 $y^i=y^i(t,s)$，它对于 t,s 是连续可微的．我们要证

明 $y^i(1,s)$与 s 无关. 引进函数

$$z^i(t,s)=\frac{\partial y^i(t,s)}{\partial s}-f^i_\beta(x^\alpha(t,s);y^j(t,s))\frac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial s}, \tag{13}$$

直接微商得到

$$\frac{\partial z^i(t,s)}{\partial t}=\frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j}\frac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial t}z^j(t,s)+\left[\frac{\partial f^i_\gamma}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial x^\gamma}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f^i_\gamma}{\partial y^j}f^j_\beta-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j}f^j_\gamma\right]\frac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial s}\frac{\partial x^\gamma(t,s)}{\partial t}.$$

由于恒等式(5), 故函数 $z^i(t,s)$满足方程

$$\frac{\partial z^i(t,s)}{\partial t}=F^i_j(t,s)z^j(t,s), \tag{14}$$

其中

$$F^i_j(t,s)=\frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j}(x^\alpha(t,s);y^k(t,s))\frac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial t}, \tag{15}$$

并且

$$z^i(0,s)=0. \tag{16}$$

注意到方程组(14)是线性齐次方程组, 在初条件 (16) 下有平凡解. 由解的唯一性可知

$$z^i(t,s)\equiv 0,$$

即

$$\frac{\partial y^i(t,s)}{\partial s}=f^i_\beta(x^\alpha(t,s);y^j(t,s))\frac{\partial x^\beta(t,s)}{\partial s}.$$

在上式中命 $t=1$, 由于 $x^\beta(1,s)=x^\alpha_1$, 故$\frac{\partial x^\beta(1,s)}{\partial s}=0$, 因此

$$\frac{\partial y^i(1,s)}{\partial s}=0,$$

即 $y^i(1,s)$与 s 无关.

现在取点(x^α_0)的一个球形邻域 $U\subset\tilde{D}$. 对于任意的 $(x^\alpha_1)\in U$,

命 $x^\alpha(t)=x_0^\alpha+t(x_1^\alpha-x_0^\alpha),0\leqslant t\leqslant 1$，设相应的问题(10)的解为 $y^i=y^i_{(x_1^\alpha)}(t)$，命$y^i(x_1^\alpha)=y^i_{(x_1^\alpha)}(1)$，则得定义在 U 上的一组确定的函数$y^i(x^\alpha)$，我们要证明 $y^i=y^i(x^\alpha)$ 正是所要的方程组(1)的解.

首先我们指出：如果 $y^i=\bar{y}^i(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 是问题(10)在连结点(x_0^α)与(x_1^α)的某条路径 $x^\alpha(t),0\leqslant t\leqslant 1$下的解，那么对于任意的$0<t_0<1$，$\tilde{y}^i(\tilde{t})\equiv\bar{y}^i(\tilde{t}t_0)(0\leqslant\tilde{t}\leqslant 1)$ 也是问题(10)在连结(x_0^α)与$(x^\alpha(t_0))$的路径 $\tilde{x}^\alpha(\tilde{t})\equiv x^\alpha(\tilde{t}t_0)$ $(0\leqslant\tilde{t}\leqslant 1)$下的解. 实际上，

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}}=t_0\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\bar{y}^i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tilde{t}t_0}$$

$$=t_0 f^i_\beta(x^\alpha(\tilde{t}t_0);\ \bar{y}^i(\tilde{t}t_0))\left.\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tilde{t}t_0}$$

$$=f^i_\beta(\tilde{x}^\alpha(\tilde{t});\tilde{y}^i(\tilde{t}))\frac{\mathrm{d}\tilde{x}^\beta(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}}.$$

将这个事实和终端值$\tilde{y}^i(1)$与连结端点的路径无关的事实结合起来，便有

$$y^i(x^\alpha(t_0))=\tilde{y}^i(1)=\bar{y}^i(t_0).\tag{17}$$

假定 $x^\alpha=x^\alpha(t)$是连结点(x_0^α)和(x_1^α)的任意一条光滑路径，$y^i=\bar{y}^i(t)$是问题（10）的相应的解，由（17）式得到

$$\bar{y}^i(t)=y^i(x^\alpha(t)),$$

代入方程组（10）有

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}\frac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t}=f^i_\beta(x^\alpha(t);\ \bar{y}^i(t))\frac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t}.$$

在上式中命 $t=1$，且$\left.\frac{\mathrm{d}x^\beta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}$可以取任意一组非零实数值，故在点$(x_1^\alpha)$成立

$$\frac{\partial y^i(x_1^\alpha)}{\partial x^\beta}=f^i_\beta(x_1^\alpha;y^j(x_1^\alpha)).$$

证毕.

当 $\tilde{D}$ 是单连通区域时，局部解 $y^i=y^i(x^a)$ 的延拓是容易做到的.

很明显，如果 D 是 R^{m+n} 中任意一个区域时，定理 1 中在可积条件(5)下局部解的存在性仍然是对的.

下面假定 D 是 R^n 中的一个区域，$\omega^a(1\leqslant a\leqslant r)$ 是区域 D 上的 r 个处处线性无关的一次微分式. 方程组

$$\omega^a=0,\ 1\leqslant a\leqslant r \tag{18}$$

称为 **Pfaff** 方程组，它可以化为偏微分方程组(1). 实际上，设

$$\omega^a=\sum_{i=1}^{n}a_i^a(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^i; \tag{19}$$

既然 $\{\omega^a\}$ 是线性无关的，不妨设系数矩阵 (a_i^a) 的前 r 个列的行列式不为零，即方阵 (a_β^a) 是可逆的，用 (b_β^a) 记它的逆矩阵. 因此，方程组(18)等价于

$$\theta^a=\sum_{\beta=1}^{r}b_\beta^a\omega^\beta=0,\quad 1\leqslant a\leqslant r,$$

即

$$\theta^a=\mathrm{d}x^a+\sum_{\xi=r+1}^{n}c_\xi^a\mathrm{d}x^\xi=0,\ 1\leqslant a\leqslant r, \tag{20}$$

其中

$$c_\xi^a=\sum_{\beta=1}^{r}b_\beta^a a_\xi^\beta. \tag{21}$$

比较 (20) 与 (2) 式可知，方程组 (18) 等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^\xi}=-c_\xi^a(x^1,\cdots,x^n),\ 1\leqslant a\leqslant r,r+1\leqslant\xi\leqslant n. \tag{22}$$

定理 2 (Frobenius 定理) 如果 Pfaff 方程组 (18) 满足条件

$$\mathrm{d}\omega^a\equiv 0\ \mathrm{mod}(\omega^1,\cdots,\omega^r),\ 1\leqslant a\leqslant r, \tag{23}$$

则经过任意一点$(x_0^1,\cdots,x_0^n)\in D$，必有一个 $n-r$ 维曲面，使得在这个曲面上 $\omega^\alpha\equiv 0$，$1\leqslant\alpha\leqslant r$.

证明 首先要指出，条件（23）在一次微分式组$\{\omega^\alpha\}$经受一个非退化线性变换时是不变的．不妨设有一组可微函数 b_β^α，使得 $\det(b_\beta^\alpha)\neq 0$，命

$$\theta^\alpha=\sum_{\beta=1}^r b_\beta^\alpha\omega^\beta,$$

那么

$$\mathrm{d}\theta^\alpha=\sum_{\beta=1}^r(\mathrm{d}b_\beta^\alpha\wedge\omega^\beta+b_\beta^\alpha\mathrm{d}\omega^\beta).$$

条件（23）说明

$$\mathrm{d}\omega^\alpha=\sum_{\beta=1}^r\varphi_\beta^\alpha\wedge\omega^\beta,$$

其中 φ_β^α 是 D 上的一次微分式，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^\alpha&=\sum_{\beta=1}^r(\mathrm{d}b_\beta^\alpha+\sum_{\gamma=1}^r b_\gamma^\alpha\varphi_\beta^\gamma)\wedge\omega^\beta\\&=\sum_{\beta,\delta=1}^r c_\delta^\beta(\mathrm{d}b_\beta^\alpha+\sum_{\gamma=1}^r b_\gamma^\alpha\varphi_\beta^\gamma)\wedge\theta^\delta\\&\equiv 0 \mod(\theta^1,\cdots,\theta^r),\end{aligned}$$

其中(c_β^α)是(b_β^α)的逆矩阵．

由此可见，当 Pfaff 方程组（18）满足条件（23)时，则方程组（20）满足同一组条件．然而，对于（20）来说，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^\alpha=&\sum_{\xi=r+1}^n\mathrm{d}c_\xi^\alpha\wedge\mathrm{d}x^\xi=\sum_{\xi=r+1}^n\Big(\sum_{\beta=1}^r\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta\wedge\mathrm{d}x^\xi\\&+\sum_{\eta=r+1}^n\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\eta}\mathrm{d}x^\eta\wedge\mathrm{d}x^\xi\Big)=\sum_{\xi=r+1}^n\sum_{\beta=1}^r\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\theta^\beta\wedge\mathrm{d}x^\xi\\&+\sum_{\xi,\eta=r+1}^n\Big(-\sum_{\beta=1}^r\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\beta}c_\eta^\beta+\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\eta}\Big)\mathrm{d}x^\eta\wedge\mathrm{d}x^\xi,\end{aligned}$$

所以 $d\theta^\alpha \equiv 0 \mod (\theta^1, \cdots, \theta^r)$，$1 \leqslant \alpha \leqslant r$，当且仅当上式最后一项为零，或者是

$$\frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\eta} - \frac{\partial c_\eta^\alpha}{\partial x^\xi} - \sum_{\beta=1}^{r} \frac{\partial c_\xi^\alpha}{\partial x^\beta} c_\eta^\beta + \sum_{\beta=1}^{r} \frac{\partial c_\eta^\alpha}{\partial x^\beta} c_\xi^\beta = 0. \tag{24}$$

根据定理 1，方程（24）恰好是偏微分方程组（22）的可积条件. 因此对于任意给定的$(x_0^1, \cdots, x_0^n) \in D$，必有方程组（22）的解

$$x^\alpha = f^\alpha(x^{r+1}, \cdots, x^n), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{25}$$

使得

$$f^\alpha(x_0^{r+1}, \cdots, x_0^n) = x_0^\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r.$$

显然，在 $n-r$ 维曲面（25）上，我们有 $\omega^\alpha \equiv 0$，$1 \leqslant \alpha \leqslant r$.

作为定理 2 的应用，我们证明第七章 § 3的定理 3 .

定理3 任意给定自变量 $u^1, \cdots, u^r$ 的 12个一次微分式 ω^i，$\omega_i{}^j, 1 \leqslant i, j \leqslant 3$，如果它们适合结构方程

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j{}^i, \\ d\omega_i{}^j &= \sum_{k=1}^{3} \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j, \end{aligned} \tag{26}$$

则在 E^3 中存在一族依赖参数$(u^1, \cdots, u^r)$的右手标架以 $\omega^i, \omega_i{}^j$ 为它的相对分量.

证明 用(a_i, a_{ij})表示标架空间的坐标，其中 $\det(a_{ij}) > 0$. 标架空间的相对分量为 $\Omega^i, \Omega_i{}^j$. 现在考虑 R^{12+r} 的一个区域上的 Pfaff 方程组

$$\begin{cases} \theta^i \equiv \Omega^i - \omega^i = 0, \\ \theta_i{}^j \equiv \Omega_i{}^j - \omega_i{}^j = 0. \end{cases} \tag{27}$$

由于 $\Omega^i, \Omega_i{}^j, \omega^i, \omega_i{}^j$ 分别满足结构方程（26），所以

$$\begin{aligned} d\theta^i &= d\Omega^i - d\omega^i \\ &= \sum_{j=1}^{3} (\theta^j \wedge \Omega_j{}^i + \omega^j \wedge \theta_j{}^i) \equiv 0 \mod(\theta^j, \theta_j{}^k), \end{aligned}$$

$$d\theta_i{}^j = d\Omega_i{}^j - d\omega_i{}^j$$

$$=\sum_{k=1}^{3}(\theta_i{}^k\wedge\Omega_k{}^l+\omega_i{}^k\wedge\theta_k{}^l)\equiv 0 \bmod(\theta^k,\theta_k{}^l).$$

注意到 $\theta^i,\theta_i{}^j$ 是处处线性无关的，并且方程组(27)实际上可化为

$$\begin{cases} da_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}\omega^j, \\ da_{il}=\sum_{j=1}^{3}a_{jl}\omega_i{}^j. \end{cases} \tag{28}$$

由定理 2 可知，存在一组函数

$$\begin{cases} a_i=a_i(u^1,\cdots,u^r), \\ a_{ij}=a_{ij}(u^1,\cdots,u^r), \end{cases} \tag{29}$$

使方程组 (28) 成立. 换言之，在 E^3 中存在一族依赖 $(u^1,\cdots,u^r)$的右手标架族，使 $\omega^i,\omega_i{}^j$ 是它的相对分量.

Frobenius 定理是十分重要的，它在微分几何中有众多的应用. 顺便指出，附录 § 1的定理 2 是 Frobenius 定理的直接推论. 曲面的存在性定理是定理 3 的特例.

§3 张 量

张量是 Ricci 引进的，它是在坐标系变换时按照一定的线性关系进行变换的量，在微分几何学、物理学、力学中有广泛的应用. Ricci 引进张量分析首先是为了研究黎曼几何学的需要.

在本节，我们用现代的语言对张量的概念作一个简单的介绍. 假定 V 是实数域上的 n 维向量空间，则 V 上全体实线性函数也构成一个向量空间，称为 V 的对偶空间 V^*(参看第七章 § 1). 空间 V 和 V^* 的关系是相互的，即空间 V 也可以看作 V^* 的对偶空间. 实际上，对于任意一个向量 $x\in V$，我们可以定义一个完全确定的实线性函数 $\tilde{x}:V^*\to R$，只要命

$$\tilde{x}(f)=f(x),\qquad \forall f\in V^*. \tag{1}$$

若把 $\tilde{x}$ 和 x 等同起来，则 V 恰好也是 V^* 上的全体实线性函

数的集合.

在第七章§1 我们已经叙述过 V 上的 r 重线性函数的概念，以及 V 上两个多重线性函数的张量积. 这些概念同样可以对于空间 V^* 来叙述.

定义 设 V 是 n 维实向量空间. 则 V 上的一个 r 重线性函数称为一个 **r 阶协变张量**，V^* 上的一个 r 重线性函数称为一个 **r 阶反变张量**. 一般地，定义在 $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r个}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s个}$ 上的多重线性函数称为 r 阶反变、s 阶协变的混合张量，或称为 **(r,s) 型张量**.

按照这个定义，V 中的元素是 1 阶反变张量，或(1,0)型张量；V^* 中的元素是 1 阶协变张量，或(0,1)型张量. 一个 r 次外形式就是 r 阶协变的反对称张量.

很明显，在全体(r,s)型张量的集合中，加法和数乘法是封闭的，因此该集合本身是一个向量空间，记作 V^r_s. r 阶反变张量的空间简记为 V^r，s 阶协变张量的空间简记为 V_s. 因此 $V^1=V$，$V_1=V^*$.

在 V 中取定一个基底$\{\delta_i\}$，设在 V^* 中的对偶基底为 $\{\delta^i\}$. 因此，V 中的任意一个元素 x 可以表示成

$$x=x^i\delta_i. \tag{2}$$

V^* 中的任意一个元素 f 可以表示成

$$f=f_i\delta^i, \tag{3}$$

其中 $f_i=f(\delta_i)$. 我们的目标是给出空间 V^r_s 的基底.

首先，利用张量积可以构造 (r,s) 型张量

$$\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_s}, \tag{4}$$

它是 $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r个}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s个}$ 上的多重线性函数. 任取 $f^1,\cdots,f^r\in V^*$，$x_1,\cdots,x_s\in V$，则有

$$\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_s}(f^1,\cdots,f^r,x_1,\cdots,x_s)$$
$$=f^1(\delta_{i_1})\cdots f^r(\delta_{i_1})\delta^{j_1}(x_1)\cdots\delta^{j_s}(x_s)$$
$$=f^1_{i_1}\cdots f^r_{i_r}x^{j_1}_1\cdots x^{j_s}_s.$$

假定 $\varphi\in V^r_s$，于是

$$\varphi(f^1,\cdots,f^r,x_1,\cdots,x_s)$$
$$=f^1_{i_1}\cdots f^r_{i_r}x^{j_1}_1\cdots x^{j_s}_s\varphi(\delta^{i_1},\cdots,\delta^{i_r},\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_s})$$
$$=\varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_s}(f^1,\cdots,f^r,x_1,\cdots,x_s),$$

所以

$$\varphi=\varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_s},\tag{5}$$

其中

$$\varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\varphi(\delta^{i_1},\cdots,\delta^{i_r},\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_s}).\tag{6}$$

容易证明，如（4）所给出的 n^{r+s} 个 (r,s) 型张量是线性无关的．因此，我们有

定理1 n^{r+s} 个 (r,s) 型张量

$$\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_s},\qquad 1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n,$$

构成空间 V^r_s 的基底，故 $\dim V^r_s=n^{r+s}$．当 (r,s) 型张量 φ 用这个基底表示时，其系数 $\varphi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 如（6）式所给出，称为张量 φ 在上述基底下的分量．

如果在 V 中取另一个基底 $\{\delta_{i'}\}$，假定

$$\delta_{i'}=a^i_{i'}\delta_i,\tag{7}$$

其中 $(a^i_{i'})$ 是一个非退化矩阵，称为从基底 $\{\delta_i\}$ 到 $\{\delta_{i'}\}$ 的过渡矩阵．我们用 $\{\delta^{i'}\}$ 表示空间 V^* 中与 $\{\delta_{i'}\}$ 对偶的基底，因此

$$\delta^{i'}(\delta_{j'})=\delta^{i'}_{j'},$$

并且

$$\delta^i(\delta_{j'})=\delta^i(a^l_{j'}\delta_l)$$
$$=a^l_{j'}\delta^i(\delta_l)=a^i_{j'}$$
$$=a^i_{l'}\delta^{l'}(\delta_{j'}),$$

所以

$$\delta^{i}=a^{i}_{i'}\delta^{i'}.\tag{8}$$

将（8）式与（7）式相对照，（7）式是用旧基底表示新基底，而（8）式是用新对偶基底表示旧对偶基底. 现在将 $(a^{i}_{i'})$ 的逆矩阵记作 $(a^{i'}_{i})$，也就是成立等式

$$a^{i'}_{i}a^{j}_{i'}=\delta^{j}_{i},\qquad a^{i}_{i'}a^{j'}_{i}=\delta^{j'}_{i'},$$

那么（8）式可以改写为

$$\delta^{i'}=a^{i'}_{i}\delta^{i}.\tag{9}$$

（9）式与（7）式相比较，都是用旧基底表示新基底，但是过渡矩阵 $(a^{i'}_{i})$ 是 $(a^{i}_{i'})$ 的逆矩阵，而且在（7）式中 $a^{i}_{i'}$ 的上指标是求和指标，在（9）式中 $a^{i'}_{i}$ 的下指标是求和指标.

现设 $x\in V$，它在基底 $\{\delta_i\}$ 和 $\{\delta_{i'}\}$ 下分别有表达式

$$x=x^{i}\delta_{i}=x^{i'}\delta_{i'}=x^{i'}a^{i}_{i'}\delta_{i},$$

因此当基底有变换式（7）时，向量 x 的分量有变换式

$$x^{i}=x^{i'}a^{i}_{i'},$$

或者

$$x^{i'}=a^{i'}_{i}x^{i}.\tag{10}$$

从形式上，（10）和（9）是一致的.

设 $f\in V^{*}$，它在新、旧基底下分别有分量

$$f_{i'}=f(\delta_{i'}),\qquad f_{i}=f(\delta_{i}),$$

所以

$$\begin{aligned}f_{i'}&=f(a^{i}_{i'}\delta_{i})=a^{i}_{i'}f(\delta_{i})\\&=a^{i}_{i'}f_{i},\end{aligned}\tag{11}$$

可见 f 的分量的变换式（11）与基底的变换式（7）是一致的.

正因为如此，f 称为1阶协变张量（或协变向量），x 称为1阶反变张量（或反变向量）. 一般地，一个 (r,s) 型张量 φ 的分量 $\varphi^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s}$ 的变换式如下：

$$\begin{aligned}\varphi^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s}&\equiv\varphi(\delta^{i'_1},\cdots,\delta^{i'_r},\delta_{j'_1},\cdots,\delta_{j'_s})\\&=a^{i'_1}_{i_1}\cdots a^{i'_r}_{i_r}a^{j_1}_{j'_1}\cdots a^{j_s}_{j'_s}\varphi(\delta^{i_1},\cdots,\delta^{i_r},\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_s})\end{aligned}$$

$$=a_{i_1}^{i_1'}\cdots a_{i_r}^{i_r'}a_{j_1'}^{j_1}\cdots a_{j_s'}^{j_s}\varphi_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r},\tag{12}$$

即分量 $\varphi_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ 的 r 个上指标按照 (9)式的规律进行变换，s 个下指标按照（7）式的规律进行变换，因此俗称φ有 r 个反变指标，有 s 个协变指标.

反过来，（12）式可以作为（r,s）型张量的定义式，即：如果对于空间 V 中的每一个基底 $\{\delta_i\}$，我们都指定了一组 n^{r+s} 个数 $\{\varphi_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\}$，并且当基底有（7）式给出的变换时，相应的数组就遵循变换规律(12)，那末我们就有了一个定义在 $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r个}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s个}$ 上的确定的（$r+s$）重线性函数，换言之，我们就有了一个（r,s）型张量φ.

实际上，对于 $f^1,\cdots,f^r\in V^*$，$x_1,\cdots,x_s\in V$，我们只要命

$$\varphi(f^1,\cdots,f^r,x_1,\cdots,x_s)$$
$$=\varphi_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}f_{i_1}^1\cdots f_{i_r}^r x_1^{j_1}\cdots x_s^{j_s},\tag{13}$$

其中 $f_{i_\alpha}^\alpha$ 是 f^α 在 $\{\delta^i\}$ 下的分量，$x_\beta^{j_\beta}$ 是 x_β 在 $\{\delta_i\}$ 下的分量. 由于 $\varphi_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$，$f_{i_\alpha}^\alpha, x_\beta^{j_\beta}$ 在基底变换（7）下分别遵循变换规律（12），（11），（10)，所以（13）式的右端是完全确定的，与 V 中基底 $\{\delta_i\}$ 的选取是无关的. 由（13）式可见，φ对于每一个自变量都是线性的，因此φ确实是一个（r,s）型张量.

现在我们可以回顾一下在曲面的理论中所遇到的张量. 设曲面S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，命

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha},\tag{14}$$

则 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 构成曲面在每一点的切空间的基底. 此处的切空间就充当本节的向量空间 V，$n=2$. 若有参数变换

$$\begin{cases}u^1=u^1(u^{1'},u^{2'}),\\u^2=u^2(u^{1'},u^{2'}),\end{cases}\tag{15}$$

命

$$\boldsymbol{r}_{\alpha'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha'}}, \tag{16}$$

则从基底 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 到基底 $\{\boldsymbol{r}_{1'},\boldsymbol{r}_{2'}\}$ 的变换是

$$\boldsymbol{r}_{\alpha'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}=\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}\boldsymbol{r}_{\alpha}. \tag{17}$$

若命 $g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{r}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_{\beta}$，$g_{\alpha'\beta'}=\boldsymbol{r}_{\alpha'}\cdot\boldsymbol{r}_{\beta'}$，则

$$g_{\alpha'\beta'}=\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}\boldsymbol{r}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_{\beta}$$

$$=\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}g_{\alpha\beta}, \tag{18}$$

所以第一类基本量 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 在曲面上给出了一个2阶协变张量场，称为曲面的第一基本张量．它在曲面的一点处的两个切向量上的值恰好是这两个切向量的内积．

同理，如果只考虑曲面上保持定向的参数变换（15），则第二类基本量 $\{b_{\alpha\beta}\}$ 也在曲面上给出一个2阶协变张量场．曲面的第一基本张量和第二基本张量都是对称的，它们分别是曲面的第一基本形式和第二基本形式（都看作二次型）的极化．

在曲面上的另一个张量场是 $\{R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\}$，它是（1,3）型张量，$\{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ 是（0,4）型张量．这些结论都可以通过推导它们在参数变换时的变换规律来验证．

在第五章所见到另一个带指标的量，即 Christoffel 记号 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$，它在曲面作参数变换（15）时所遵循的变换规律是

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}=\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u^{\gamma'}}+\frac{\partial}{\partial u^{\beta'}}\left(\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u^{\gamma'}}\right)\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\gamma}} \tag{19}$$

（参看第五章§1 习题3），可见 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ 所遵循的规律不是张量的变换规律，所以 $\{\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\}$ 不是张量！

在第六章§5，我们定义过切向量场的绝对微商：设 $\boldsymbol{X}$ 是曲面上的一个切向量场，故

$$\boldsymbol{X}=x^{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha}. \tag{20}$$

当然 (x^α) 在曲面作参数变换时遵循反变向量的变换规律，但是 $(\mathrm{d}x^\alpha)$ 不是反变向量！我们定义

$$\mathrm{D}x^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha + x^\beta \mathrm{d}u^\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}, \tag{21}$$

$$x^\alpha_{,\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\gamma} + x^\beta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma},$$

则 $\mathrm{D}x^\alpha$ 恰好遵循反变向量的变换规律，$x^\alpha_{,\beta}$ 遵循 (1,1) 型张量的变换规律（请读者自己验证）．因此，虽然 Christoffel 记号 $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ 本身不是张量，但是它在通过微分构造新的张量时起着十分重要的作用．在黎曼几何学中，$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ 称为**联络系数．**

再有，命

$$b_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - b_{\delta\beta}\Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} - b_{\alpha\delta}\Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}, \tag{22}$$

则 $b_{\alpha\beta,\gamma}$ 遵循 (0,3) 型张量的变换规律，称为第二基本张量 $b_{\alpha\beta}$ 的绝对微商．用这个记号，曲面的 Codazzi 方程就变得十分简单了，也就是

$$b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0. \tag{23}$$

最后，我们提一下抽象曲面的概念．在第六章 § 4 我们称在变量 (u^1, u^2) 的区域 D 上给定了一个正定的二次微分形式 $g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta$ 的结构为一个抽象曲面．曲面上内蕴几何学的研究都可以移植到抽象曲面上来．从 E^3 中具体的曲面过渡到抽象曲面，一个要紧的问题就是：什么是抽象曲面上的切向量和切空间？利用张量的语言，我们把区域 D 上在一点的切向量定义为一组实数，它们在参数变换下遵循反变向量的变换规律．当然这样的理解还是远远不够的．所谓抽象曲面就是现在所称的局部的 2 维黎曼空间．要把黎曼空间的概念从低维推广到高维、从局部推广到大范围，需要把区域 D 的概念精确化、整体化，这就是所谓的微分流形的理论．我们需要学习微分流形上的切向量、切空间的概念，需要学习微分流形上的微积分，特别是外微分理论和张量分

析理论．无论如何，本书所学习的曲线、曲面的局部理论、特别是曲面的内蕴几何学，为学习微分流形、黎曼几何提供了具体的、直观的背景．为进一步的学习，可以阅读：

[1] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, 1949.

[2] W. B. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1986.

[3] N. J. Hicks, Notes on Differential Geometry, D. Van Nostrand, Princeton, 1965.

[4] 陈省身、陈维桓，微分几何讲义，北京大学出版社，北京，1983.

索　引

（按汉语拼音顺序）

B

C

D

E

F

G